SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XII. — (Anno LXXXI)

29 ottobre 1941 — 28 ottobre 1942 - XX

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1942-XX

Pubblicato il dì 30 novembre 1942 - XXI

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XII. — (Anno LXXXI)

29 ottobre 1941 — 28 ottobre 1942 - XX

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1942-XX

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1940-41 (XIX)

letta nell' adunanza del dì 6 dicembre 1941 (XX)

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Consoci,

Nello scorso anno accademico, mentre il ritmo delle armi è continuato con accresciuto vigore per conquistare alla nostra Patria — in stretto cameratismo con l'alleata Germania — la completa indipendenza economica, non si è interrotta la vita del pensiero, che nella nazione rappresenta sempre il perpetuarsi delle più nobili tradizioni della stirpe. Ed anche il nostro Sodalizio — che nell' Italia meridionale è la più antica e gloriosa fiaccola del sapere, destinata a tramandare alle nuove generazioni il sacro retaggio degli avi — ha proseguito senza soste la sua pacifica missione di cultura, nella quale pur vibrano intensi il più puro patriottismo e l' ardente passione dei figli migliori.

Di questa continuata attività sono chiara testimonianza il nuovo volume del Rendiconto (XI della serie 4ª), testè pubblicato, e le svariate memorie inserite nel II volume della 3ª serie degli Atti, in avanzato corso di stampa mercè il generoso contributo che ci viene ancora largito dalla benemerita Direzione generale del Banco di Napoli.

Nella consueta, sommaria rassegna annuale di quest' attività accademica, inizierò il mio dire dai contributi astronomici.

Come negli anni precedenti, il consocio CARNERA ha pubblicato nel nostro Rendiconto i risultati ricavati dall'Ufficio centrale delle Latitudini in base alle osservazioni eseguite negli anni 1935 e 1940, deducendo la traiettoria percorsa dal polo di rotazione della Terra. Per il primo di tali anni la deduzione delle variazioni di latitudine è stata, come di consueto, duplice, cioè tenendo conto una volta soltanto delle Stazioni boreali, ed una basandosi tanto sulle boreali che sulle australi; per il 1940, invece, non fu possibile fare lo stesso, essendo venute a mancare per la maggior parte le osservazioni delle due stazioni australi.

In un'altra breve nota — sunto di più ampia memoria pubblicata altrove — il medesimo autore ha riveduto e discusso tutte le misure di latitudine fatte alla Specola di Capodimonte dai vari studiosi che vi si sono succeduti durante più di un secolo, a cominciare da Carlo Brioschi fino a Emanuele Fergola, Arminio Nobile, Filippo Angelitti e Francesco Contarino, deducendo il valore, che oggi è lecito ritenere come il più attendibile per la latitudine della Specola napoletana: risultato interessante, perchè da essa sono state tratte molte delle coordinate della rete fondamentale italiana.

Sempre nel campo delle ricerche astronomiche, il dott. T. Nicolini ha pubblicato una nota sopra le *Variazioni di altezza della cromosfera solare*, nella quale, usando la serie di misure condotte in quest'ultimo ventennio all'Osservatorio di Arcetri ed a quello di Catania, ha esaminato la variazione d'altezza cromosferica negli anni successivi e la variazione di profilo in prossimità dei massimi e minimi d'attività solare, mostrando come risulti evidente una oscillazione a periodo annuo dell'altezza stessa, la cui interpretazione è estranea alla fisica solare e forse connessa con l'atmosfera terrestre, o con la rivoluzione annua, o con altre cause, e facendo opportunamente rilevare come siano desiderabili serie di misure più numerose e più fitte dell'altezza cromosferica, in modo da poter disporre del profilo accurato di questo elemento, che rappresenta una caratteristica importante delle varie fasi dei cicli solari.

Passando al campo delle indagini statistiche, è da segnalare una nota del socio corrispondente Andreoli, dal titolo *Statistica di configurazioni*, la quale rappresenta un contributo all'uso sistematico delle matrici negli schemi di evoluzione di collettività. Lo schema studiato è principalmente rivolto a fenomeni meteorologici, ma può essere adoperato in qualsiasi fenomeno, nel quale a fianco di individui di primo ordine vengono considerati individui di secondo ordine dati da coppie di quelli. Si tratta pertanto di una vera questione di metodologia, che qui viene sviluppata e che si ricollega alle precedenti ricerche sulle collettività pubblicate dal nostro consocio, riprendendo il concetto di coppia di variabili mutuamente casuale.

Parecchi sono stati i contributi riguardanti le matematiche pure. In una nota sopra *Il problema della gonalità* il prof. Amodeo, continuando le sue ricerche sulla geometria delle serie lineari delle curve algebriche precedentemente esposte nei nostri Rendiconti, ha determinato la gonalità delle curve regolari nel loro ordine, ha stabilito i teoremi fondamentali generali riguardanti la gonalità delle curve singolari, ed ha classificato le curve singolari di un determinato ordine m, dalla massima gonalità $m-1$ alla gonalità 1, pervenendo — dopo aver mostrato i caratteri principali delle curve k-gonali singolari — alla determinazione delle *curve normali piane* di qualunque gonalità. In un altro lavoro *Sulla rappresentazione*

conforme delle superficie rettificabili, il prof. A. Colucci ha stabilito le proprietà fondamentali di una rappresentazione conforme generalizzata per una classe importante di superficie, quelle dette *rettificabili* da Lebesgue. Il prof. Guido Barba ha esaminato la *configurazione dei cerchi osculatori e delle sfere osculatrici* ad una curva sghemba ritrovando, tra l'altro, sotto ipotesi meno restrittive, la corrispondente proprietà per le curve piane, e pervenendo alla conclusione, che i cerchi osculatori ad una curva, in punti infinitamente vicini, non hanno punti reali in comune, mentre le sfere osculatrici si tagliano. Il signor Fichera ha dato, in una nota, una formola di *decomposizione delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili,* che è l'estensione di quella di Poincaré per le funzioni armoniche. Mediante l'introduzione di certi speciali operatori, egli ha riconosciuto il carattere invariantivo di alcune funzioni, che intervengono in tale decomposizione, rispetto alla scelta di certi poli.

Alcuni altri contributi si riferiscono alla scienza delle costruzioni. Il prof. A. Galli in una nota *(Instabilità nell'arco con spinta eliminata)* ha determinato il valore critico della spinta orizzontale dell'arco ribassato con spinta eliminata, tenendo conto della deformazione elastica del tirante e, con approssimazione, di quella dei montanti. Ha potuto così constatare l'ottimo comportamento dell'arco nei riguardi della stabilità longitudinale. E il prof. F. Jossa in altro lavoro (*Calcolo statico di prismi costituiti da materiali che non seguano la legge di Hooke*) ha studiato le modalità del calcolo statico di solidi prismatici costituiti da materiale per il quale non è verificata la legge di proporzionalità tra tensioni e deformazioni. Tale studio egli ha sviluppato in relazione alle sollecitazioni di sforzo normale e di flessioni, coesistenti o non coesistenti, alle deformazioni da esse prodotte, e alla determinazione di incognite iperstatiche.

In un diverso campo di indagini, il dott. Lucio Vallese ha pubblicato due lavori, che cercano di risolvere, in modo semplice ed uniforme, problemi di notevole interesse, sia teorico che pratico, connessi con grandezze iperboliche ed iperbolico-circolari. Nel primo (*Nuovi metodi simbolici in elettrotecnica*), l'autore ha esaminato il comportamento a regime di un circuito elettrico a caratteristiche costanti, alimentato in serie da tensioni di natura iperbolica ed iperbolico-circolare. Per la trattazione di tali fenomeni egli ha introdotto nuovi metodi simbolici, mediante i quali si giunge alla formulazione di una legge analoga a quella di Ohm risultando pure applicabili le due leggi di Kirchhoff.

Nel secondo lavoro, *Sulla analisi dei fenomeni di regime variabile nei sistemi lineari a costanti concentrate,* inserito fra le memorie del nuovo volume degli Atti accademici, e nel quale vengono sviluppati i concetti innanzi indicati, egli ha esposto un metodo simbolico generale valevole per la trattazione dei fenomeni di regime variabile e di quelli di regime stazionario nei sistemi fisici lineari a costanti concentrate. L'appli-

cazione di tale metodo ha richiesto l'introduzione di due nuove specie di numeri, i pseudocomplessi e gli ipercomplessi, di cui sono state indicate le proprietà e le regole di calcolo.

Una nota del dott. G. Cena ha dato notizia dei risultati ottenuti sperimentando sul comportamento, col variare della temperatura, di righe situate nella zona visibile di alcuni composti di terre rare (ossidi e solfati di praseodimio, neodimio ed erbio).

Sono ancora da segnalare diversi contributi di chimica applicata ed industriale. In una nota dei dottori G. Zaffuto e A. Giannone (*Contributo alla conoscenza di alcuni materiali silicei nazionali*) sono state descritte le caratteristiche strutturali, chimiche e tecniche di alcune rocce silicee diffuse in varie regioni del nostro territorio, le quali, meritando particolare attenzione per la relativa facilità con cui si può conseguire la stabilizzazione termica del materiale, sono state opportunamente vagliate attraverso le necessarie indagini di laboratorio ai fini della loro utilizzazione nell'industria dei refrattari. In un lavoro del dott. V. Cirilli, che si riferisce a particolari *Indagini sulle terre refrattarie di Fiano Romano*, sono stati studiati, dal punto di vista chimico, termico e röntgenografico, alcuni materiali refrattari di una cava presso la via Tiberina, concludendo che essi sono costituiti prevalentemente da halloysite e da alunite in rapporto variabile da campione a campione. In un'altra nota, *Sulla costituzione dei tufi bianchi della Solfatara di Pozzuoli, e di materiali geneticamente simili provenienti dall' isola d' Ischia*, il medesimo autore estende lo stesso ordine di indagini ad alcuni materiali provenienti dal versante settentrionale della Solfatara di Pozzuoli e dalla regione nord-orientale dell' isola d' Ischia, dimostrando che i primi sono costituiti per la massima parte da silice amorfa e da alunite e contengono altresì solfati solubili, mentre i secondi sono da ritenersi dei miscugli complessi di silice amorfa, caolino, alunite, sanidino inalterato e piccole quantità di pirite e di solfati solubili. Finalmente, in separato lavoro dovuto alla collaborazione dei dott. V. Cirilli e A. Giannone, *Sulla presenza di β- e α-cristobalite in alcuni campioni di opale*, sono stati sottoposti all'analisi röntgenografica e termo-dilatometrica alcuni campioni di opale di differenti provenienze, nei quali è stata riscontrata la presenza, in diverso rapporto, di α- e di β-cristobalite, e si è studiata la varia influenza che su di questa esercita il trattamento termico fino a 800°.

Altri lavori si riferiscono a ricerche di anatomia e di biologia. Di alcune *recenti indagini sull'orecchio interno umano* ha dato notizia il consocio Diamare, ricordando i risultati ottenuti, nel suo Istituto, da due studiosi, uno dei quali ha compiuto una laboriosa indagine sul cosidetto ramo vestibolare del nervo cocleare, mentre l' altro ha trattato della discussa funzione e morfologia del sacco endolinfatico. Una voluminosa ed importante memoria sulla *Eusicyonia carinata* (*Olivi*), che nell'anno precedente

aveva meritato il premio Filippo Cavolini conferito dalla nostra Accademia, è stata accolta per la stampa nel nuovo volume degli Atti. L'autore, prof. A. Palombi, ha esaurientemente studiato l'anatomia, la fisiologia, lo sviluppo e le anomalie — in rapporto con gli altri Crostacei decapodi — degli apparecchi digerente, branchiale e sessuale di questo importante Peneide.

Si giunge così ad una memoria paleontologica, dovuta al dott. G. Mirigliano ed ugualmente inserita nel volume degli Atti. Trattando di alcuni *Avanzi di vertebrati quaternari di Melpignano* (*Lecce*), egli ha descritto i resti di ossa e di denti di rettili, uccelli e mammiferi estratti da una gora ossifera quaternaria nei pressi di Melpignano, ammettendo che il riempimento di essa si sia potuto effettuare in quel periodo di tempo che va dall'interglaciale riss-würmiano alla prima fase della glaciazione di Würm.

Nel campo cristallografico, il prof. A. Scherillo ha pubblicato una nota, nella quale prendendo in esame alcuni cristalli di hauerite di Raddusa in Sicilia, già segnalati da Eugenio Scacchi nel nostro Rendiconto dell'anno 1890 e conservati nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli, ne ha descritto la simmetria pentagono-dodecaedrica tetraedrica, dandone le misure angolari e dimostrando che si tratta di geminati secondo $\{100\}$ di individui enantiomorfi.

È da ricordare, infine, una memoria del socio D'Erasmo, il quale, con lo scopo di contribuire alla storia dei progressi della geologia nel mezzogiorno d'Italia, e sopratutto nella zona vesuviana e flegrea, ha voluto dare, in questo lavoro, una diffusa ed ordinata illustrazione di un manoscritto, inedito e pressochè ignorato, *di Niccolò Braucci da Caivano* (*1719-1774*), che nella seconda metà del secolo XVIII occupò interinalmente per sei anni la cattedra di Storia naturale nell'Università di Napoli e che, pur essendo stato sopratutto un medico ed avendo prediletto l'insegnamento della botanica, anche nel campo geologico ebbe spesso idee esatte e con occhio limpido seppe scrutare, malgrado le sciocche credenze proprie del tempo in cui visse, le forme e le vicende di questo meraviglioso lembo di terra campana plasmato dai fuochi ipogei.

Com'è noto, non furono banditi, durante lo scorso anno accademico, per effetto di una disposizione di carattere generale, dato lo stato di guerra, nuovi concorsi a premio, e rimasero sospesi quelli precedentemente deliberati e non ancora chiusi o giudicati.

Due gravi perdite ebbe a subire l'Accademia nello scorso anno 1940-41 - XIX.

Il 17 febbraio scorso si spense in Napoli, a 67 anni, il nostro socio corrispondente nella sezione di Scienze matematiche Generoso Gallucci,

che all'Accademia apparteneva dal dì 11 giugno 1932 e che alle nostre pubblicazioni aveva voluto riserbare molteplici ed importanti frutti del suo versatile ingegno, comprendenti un quarantennio di studi. Uomo probo e buono, maestro di abilità non comune che all'insegnamento medio ed universitario dedicò tutta la sua esistenza, scienziato che al largo sapere matematico unì una profonda cultura umanistica, egli si occupò principalmente di questioni geometriche relative alle configurazioni e in particolar modo e brillantemente di quella dell'esagramma di Pascal, ma pubblicò altresì numerosi e pregevoli lavori riguardanti la filosofia teoretica e la critica dei principî e dei concetti matematici, fra cui specialmente notevole il suo saggio sull'infinito, rivelandosi sempre studioso sincero ed appassionato della verità, nonchè espositore chiaro ed efficace in materie così difficili.

Il 19 settembre cessò di vivere a Diso, dove era nato 74 anni or sono, Filippo Bottazzi, nostro socio ordinario nella Sezione di Scienze naturali dal dì 8 maggio 1926. Scienziato insigne, ricercatore geniale, studioso profondo, egli contribuì in sommo grado al progresso della Fisiologia e della Chimica biologica con ricerche fondamentali, fra le quali meritano di essere specialmente ricordate la dottrina del sarcoplasma, la teoria sull'azione della milza, le indagini sul succo muscolare. Anima di artista, scrittore elegante, filosofo acuto, storico accurato, patriota fervente, egli fu pure maestro sommo ed animatore instancabile di una eletta schiera di allievi, fra i quali volle vivere anche allorchè, raggiunti i limiti di età, dovette lasciare l'insegnamento prediletto. Cultore appassionato del genio di Leonardo, ammiratore di Lazzaro Spallanzani e di altri grandi italiani, pubblicò sulla loro opera numerosi e pregevoli studi, rivelando una versatilità dell'ingegno, che valse senza dubbio ad ottenergli i più ambiti riconoscimenti in Italia e fuori.

A colmare i vuoti, che il tempo accresce inesorabilmente tra le nostre file, l'Accademia provvide con la nomina di parecchi soci corrispondenti nazionali nelle due Sezioni. Nel giugno scorso l'Accademia propose, e nel mese successivo il Ministro della Educazione Nazionale approvò la nomina dei professori Mammana Gabriele, Mattioli Gian Domenico, Panetti Modesto e Spampinato Niccolò a corrispondenti nella Sezione di Scienze matematiche, e dei professori Imbò Giuseppe, Milone Ferdinando e Salfi Mario a corrispondenti nella Sezione di Scienze naturali.

Rafforzati, con questi nomi cari e stimati, i suoi effettivi, il nostro Sodalizio inizia i lavori del nuovo anno con fede incrollabile nei destini della Patria e nell'eroismo dei suoi figli, che combattendo valorosamente in cielo, in terra e nel mare, ne difendono i sacrosanti diritti e nè confermano l'insopprimibile volontà di vittoria.

Le lave attuali del Vesuvio: I) lave dell'autunno 1940

Nota del prof. **Antonio Scherillo**, *presentata dal socio* **G. De Lorenzo**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Si studiano petrograficamente le lave del Vesuvio dell'autunno 1940, e si confrontano i risultati delle analisi chimiche di queste lave con quelli delle analisi delle lave eruttate dal 1631 in poi.

È mia intenzione di studiare sistematicamente le lave vesuviane man mano che verranno emesse dal vulcano. Inizio tale studio col presente lavoro che ha per oggetto le lave dell'ottobre-dicembre 1940.

Prima però di entrare in argomento, credo necessario dare il quadro delle analisi chimiche delle lave vesuviane finora eseguite, a cominciare dalla lava del 1631, per chiarirne il tipo chimico e stabilire gli opportuni confronti, allo scopo di mettere in evidenza le eventuali variazioni di composizione chimica.

Le analisi attendibili delle lave vesuviane, da quella del 1631 in poi, sono riportate, insieme coi relativi valori di Niggli, nelle tabelle seguenti.

I) *Lave dal 1631 al 1906* [1])

	(1) Lava del 1631 (an. Washington)	(2) Lava del 1872 (?) (an. Washington)	(3) Lava del 1893 (an. Mrha)	(4) Lava del 1903 (an. Washington)
SiO_2	47.71	47.65	48.99	48.10
TiO_2	0.37	1.13	—	1.41
ZrO_2	0.06	0.02	—	tr.
Al_2O_3	17.61	18.13	19.82	17.56
Fe_2O_3	2.46	2.63	5.26	2.48
FeO	5.68	6.48	5.29	6.10
MgO	4.80	4.19	2.82	4.27
CaO	9.42	9.01	8.13	8.16
BaO	0.26	0.24	—	0.08
K_2O	7.64	7.47	9.06	7.90
Na_2O	2.75	2.78	3.17	2.76
P_2O_5	0.77	0.50	0.33	1.01
SO_3	—	tr	—	tr
H_2O-	—	0.11	—	0.04
H_2O+	tr	0.13	—	0.12
	99.53	100.47	100.17	99.90

[1]) Per queste analisi v. Washington H. S., *Chemical analyses of igneous rocks* — Washington 1917 — An. 1 pag. 580; an. 2 pag. 580; an. 3 pag. 580; an. 4 pag. 580. Secondo Rittmann A. *(Die geologisch bedingte Evolution und Differentiation des Sommavesuvmagmas.* Zeit. Vulk. 1933) l'analisi 2 si riferisce alla lava del 1858.

Segue Lave dal 1631 al 1906

	(1) Lava del 1631 (an. Washington)	(2) Lava del 1872 (?) (an. Washington)	(3) Lava del 1893 (an. Mrha)	(4) Lava del 1903 (an. Washington)
si	114	115	124	120
al	25	25 1/2	29 1/2	29 1/2
fm	33	33	26	33 1/2
c	24	23 1/2	22	22
alc	18	18	22 1/2	19
k	0.64	0.64	0.65	0.66
mg	0.52	0.46	0.41	0.48
grado di silicizz.	0.66	0.67	0.65	0.68

II) *Lave del 1906* [2])

	(5) Lava (an. Szathmary)	(6) Lava (an. Casoria)	(7) Lava (an. Pisani)	(8) Lava (an. Pisani)	(9) Scoaia (an. Pisani)	(10) Scoria (an. Pisani)	(11) Scoria (an. Casoria)
SiO_2	47.94	47.61	48.28	48.81	47.50	48.10	48.57
TiO_2	tr	0.76	1.28	1.01	1.05	1.15	—
Al_2O_3	19.52	18.67	18.39	16.64	18.59	15.31	16.61
Fe_2O_3	3.99	3.51	1.12	2.65	1.52	3.20	5.36
FeO	2.01	5.85	7.88	6.28	7.62	5.45	4.67
MnO	0.49	0.76	—	—	—	—	0.26
MgO	3.05	3.92	3.72	6.15	3.86	7.55	5.03
CaO	10.40	8.33	9.20	9.87	9.16	12.45	10.38
BaO	—	0.17	—	—	—	—	—
K_2O	7.66	7.09	7.25	5.09	7.05	4.12	5.23
Na_2O	3.07	2.31	2.84	2.85	2.72	1.98	2.39
P_2O_5	1.42	0.80	0.51	0.66	tr	0.12	0.79
SO_3	0.05	—	—	—	—	—	—
Cl	tr	—	—	0.34	—	—	—
H_2O	0.20	—	0.62	0.05	1.25	0.87	—
	99.80	99.78	101.09	101.10	100.32	100.28	99.29
si	119	118	118	112	116	106	115
al	28 1/2	27 1/2	26 1/2	22 1/2	26 1/2	20	28
fm	24	33 1/2	31 1/2	38	32	40 1/2	37
c	27 1/2	22	24	24 1/2	24	29 1/2	26 1/2
alc	20	17	18	15	17 1/2	10	13 1/2
k	0.66	0.64	0.63	0.57	0.61	0.58	0.58
mg	0.48	0.43	0.43	0.56	0.43	0.62	0.50
grado di silicizz.	0.66	0.70	0.68	0.70	0.68	0.76	0.75

[2]) An. 5 WASHINGTON H. S. op. cit. pag. 580; an. 6 pag. 572; an. 7 pag. 580; an. 8 pag. 670; an. 9 pag. 580. Per le analisi 6 e 11 v. CASORIA E. *La lava di Boscotrecase e il lapillo di Ottaiano.* Portici, 1908. Per le analisi 7, 8, 9, 10 v. LACROIX A. *Les produits laviques de la récente éruption du Vésuve.* Comptes rendus. Ac. Sc. 1906; *Étude minéralogique des produits silicates de l'éruption du Vésuve (avril 1906).* Nouv. Arch. du Muséum, 1907.

III) *Lave dal 1913 al 1929* [3])

	(12) Scoria del 1913 (an. Bernardini)	(13) Lava del 1914 (an. Washington)	(14) Lava del 1929 (on. Narici)
SiO_2	47.80	47.30	46.75
TiO_2	0.69	1.13	1.15
Al_2O_3	15.30	16.81	19.93
Fe_2O_3	3.90	2.19	2.00
FeO	5.90	6.91	5.04
MnO	0.61	0.09	0.17
MgO	5.22	5.16	4.72
CaO	11.40	10.43	0.90
BaO	tr	0.23	0.10
K_2O	5.07	6.86	6.71
Na_2O	2.35	2.33	2.56
P_2O_5	0.78	0.70	0.24
SO_3	—	0.18	—
Cl	—	0.06	0.25
H_2O-	—	0.16	0.09
H_2O+	—	0.20	0.35
	99.92	100.74	99.96
si	123	110	111
al	21	23	28
fm	37	35 ½	31
c	29	26	25
alc	13	15 ½	16
k	0.60	0.66	0.63
mg	0.50	0.51	0.55
grado di silicizz.	0.81	0.68	0.67

Come è noto, le lave del Vesuvio dal risveglio del 1631 in poi sono leucotefriti di tipo basico (vesuviti). Dall'esame delle tabelle precedenti si conclude che dal 1631 al 1906 il magma è rimasto sostanzialmente invariato. Bisogna però notare che per questo periodo il numero di analisi è assolutamente insufficiente (mancano tra l'altro analisi di lave del XVIII secolo). Qualche variazione peraltro deve essere senza dubbio avvenuta e l'analisi della lava del 1893 ci permette appunto di cogliere una di queste variazioni; la lava è infatti più ricca di alcali e più povera di magnesio. La lava del 1903 è invece tornata al tipo comune.

La grande eruzione dell'aprile 1906 ha attirata l'attenzione di molti studiosi: ne segue che le analisi della lava e delle scorie, anche volendo limitarsi come ho fatto io nella tabella II, a quelle che appaiono più atten-

---

[3]) An. 12 Malladra A. *Sui fenomeni consecutivi all'apertura della bocca 5 luglio 1913 nel cratere del Vesuvio.* Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli 1914; an. 13 Washington H. S. op. cit. pag. 690; an. 14 Narici E. *Contributo alla petrografia chimica della provincia petrografica campana e del Monte Vulture.* Zeit. Krist. 1932.

dibili, sono numerose, e ciò permette di fare qualche considerazione non priva d'interesse. In primo luogo sembra che la composizione chimica del magma sia stata alquanto variabile. Tre analisi (6, 7, 9), sono assai simili fra loro e si ricollegano strettamente colle analisi 1, 2, 4. Particolarmente interessante è l'analisi delle scorie e del lapillo caduti ad Ottaviano nella notte del 7 all'8 aprile 1906 (analisi 10, 11). Il tipo chimico si stacca abbastanza nettamente da quello delle analisi finora considerate per un valore di *alc* minore e per contro per il coefficiente *fm* e il grado di silicizzazione più alti. Secondo Lacroix si tratta di materiale più antico che le esplosioni hanno staccato dalle pareti del condotto vulcanico. Ad ogni modo una porzione di questo materiale deve essere stata inglobata in alcune parti del magma e infatti l'analisi 8 è intermedia, rispetto ai valori di Niggli, tra le analisi 10, 11 e le analisi 6, 7, 9.

Dal 1906 al 1913 il Vesuvio è rimasto allo stato di solfatara. Il magma coevo, riapparso nel 1913 (an. 12) era più acido dell'ordinario e si ricollegava per molti aspetti alle pomici di Ottaviano. Nella lava del 1914 (an. 13) tale somiglianza va attenuandosi, e, infine, la lava del 1929 è tornata al tipo comune per quanto il valore di *alc* sia ancora un po' basso.

La determinazione dei costituenti minori è stata spesso trascurata. Tattavia i saggi eseguiti, per quanto incompleti, mostrano che questi costituenti presentano da una lava all'altra forti variazioni. In genere le lave sono abbastanza ricche di TiO_2 e di P_2O_5. Relativamente abbondante è anche BaO (0.2 % in media).

Fissati in tal modo i caratteri delle lave vesuviane fino al 1926 (nessuna lava più recente è stata analizzata), passo alla descrizione delle lave dell'autunno 1940.

In quest'epoca dal cratere del Vesuvio si è avuta una notevole emissione di lava, sgorgata ai piedi del conetto eruttivo, la quale nell'ottobre si è riversata lungo il fianco esterno settentrionale del cono, giungendo fino al piede di questo e interrompendo la strada automobilistica di recente costruzione che saliva dall'osservatorio all'orlo del cratere.

Osservate al microscopio mostrano una nettissima struttura ipocristallina; la pasta fondamentale è quasi completamente vetrosa; salvo qualche cristallo di pirosseno, plagioclasio, apatite e olivina la quale è scarsissima e scheletri cristallini di sostanze non determinabili. In sezione sottile il colore del vetro è bruno.

I minerali componenti i fenocristalli sono tre: leucite, plagioclasio, pirosseno. La leucite è il componente di gran lunga più diffuso: piuttosto che grandi fenocristalli isolati ha tendenza a formare aggregati di individui di mediocri dimensioni. È nettamente idiomorfa rispetto al pirosseno. Questo è colorato in verde con debole pleocroismo dal verde (α) al verde giallastro (γ). Spesso alla periferia il colore dei cristalli è più chiaro. Il plagioclasio ha carattere fortemente basico: si tratta di bytownite in gemi-

nati doppi albite-Carlsbad coll'85% di An, come ho potuto determinare tavolino universale. Il segno ottico è negativo con $2V = 80°$.

Mancano in queste lave la nefelina, i minerali del gruppo della sodalite e la magnetite.

In complesso si tratta di tipiche vesuviti.

Ho esaminato tre campioni: uno (*a*) fluito nell'ottobre, raccolto sul bordo del cratere, un altro (*b*) fluito il 4 novembre, raccolto nell'interno del cratere, e un terzo (*c*) fluito il 14 dicembre pure raccolto nell'interno del cratere.

I risultati delle analisi sono qui esposti:

	a	b	c	media
SiO_2	47.57	47.87	47.74	47.73
TiO_2	0.33	0.35	0.40	0.36
ZrO_2	0.04	tr	0.04	0.03
Al_2O_3	19.60	19.74	19.54	19.63
Fe_2O_3	2.39	2.87	2.65	2.64
FeO	5.81	5.81	6.09	5.90
MgO	3.32	3.47	3.45	3.41
CaO	8.10	8.45	8.63	8.39
BaO	0.26	0.20	0.30	0.25
K_2O	7.76	7.61	7.45	7.61
Na_2O	4.00	3.17	3.50	3.58
P_2O_5	0.73	0.58	0.70	0.67
SO_3	0.09	0.10	0.04	0.08
Cl	0.13	0.14	0.10	0.12
H_2O-	0.04	—	—	0.01
H_2O+	0.22	0.24	0.28	0.25
	100.39	100.60	100.91	100 66
$-O/Cl_2$	0.03	0.03	0.02	0.03
	100.36	100.57	100.89	100.63
si	116	118	117	117
al	28 1/2	28 1/2	28	28 1/2
fm	28 1/2	30	29 1/2	29
c	21	22	22 1/2	22
alc	22	19 1/2	20	20 1/2
k	0.55	0.61	0.59	0.58
mg	0.46	0.43	0.43	0.44
grado di silicizz.	0.61	0.66	0.65	0.64

Le tre analisi sono, come era da aspettarsi, assai simili tra loro, specialmente le ultime due. L'analisi *a* si stacca leggermente dalle altre per un quantitativo di alcali un po' maggiore. Delle lave emesse dal 1913 in poi queste sono quelle che si avvicinano maggiormente al tipo vesuviano comune di cui possiamo scegliere come rappresentante la lava del 1631. La differenza più sensibile è il più alto tenore in Na_2O. La lava dell'ottobre 1940 è anzi, fra quelle finora conosciute, la più ricca di Na_2O.

Dal 1913 in poi il « grado di silicizzazione » delle lave è andato sempre diminuendo; quello della lava dell'ottobre 1940 è il più basso finora riscontrato.

Se facciamo la media dei valori di Niggli delle lave dal 1929 al 1940, otteniamo:

si	al	fm	c	alc	k	mg	gr. di sil.
114	28	30½	23½	18	0.60	0.50	0.66

cioè valori notevolmente vicini a quelli delle lave del 1631. La somiglianza aumenterebbe ancora facendo la media anche coi valori della lava del 1914. Si avrebbe infatti:

si	al	fm	c	alc	k	mg	gr. di sil.
113	26	32	24½	17½	0.62	0.50	0.66.

Non bisogna tuttavia attribuire eccessiva importanza a queste medie perchè ignoriamo quale sia il volume di lava corrispondente a ciascuna analisi: facendo la media ho supposto che i volumi fossero uguali. Ad ogni modo si può notare quanto segue. Nelle pagine precedenti ho detto che si potrebbe considerare la lava del 1914 come dovuta all'assimilazione nel magma vesuviano normale di lave precedenti più acide di composizione chimica un po' differente. Ma il fatto che i valori di Niggli medi delle lave del 1914, 1929, 1940 si avvicinano molto a quelli delle lave vesuviane comuni, può far pensare che la lava del 1914 non sia altro che una frazione del magma normale, differenziatesi con arricchimento di minerali femici. La lava del 1940 proverrebbe invece delle porzioni arricchitesi indirettamente in minerali sialici.

Si tratta però di semplici ipotesi che potranno essere discusse con qualche fondamento solo quando il numero delle analisi sarà di molto aumentato.

Ringrazio il direttore dell'Osservatorio vesuviano prof. Imbò e l'assistente dott. Iovine per il cortese aiuto prestatomi per la raccolta dei campioni.

Esempi di coazioni termiche negli archi piani a grande curvatura

Nota dell' ing. **Giuseppe Sambito**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Si studiano le coazioni e le sollecitazioni che nascono negli archi elastici a grande curvatura, per effetto di variazioni non lineari della temperatura nell' interno dell' arco; si applicano i risultati ottenuti ad alcuni tipi comuni nelle applicazioni tecniche.

I. Si consideri un tronco di solido elastico a grande curvatura (fig. 1 *a*) compreso fra due sezioni trasversali molto vicine, comprendenti l' angolo $d\varphi$ e si riferisca la sezione trasversale del solido ai suoi assi principali d' inerzia u e v (giacente questo nel piano dell' asse) fig. 1. Le superfici d' intradosso

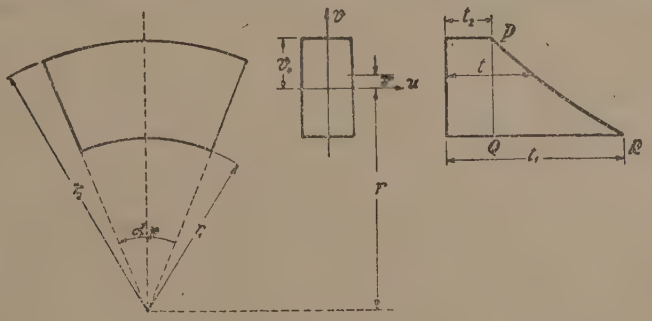


Fig. 1.

e d' estradosso del solido siano soggette a due temperature diverse t_1 e t_2; è noto dalla teoria della trasmissione del calore che la legge di variazione della temperatura nell' interno del solido è logaritmica (fig. 1*b*), pertanto in una fibra generica a distanza v dall' asse delle u e corrispondente al raggio di curvatura r, il valore della temperatura è espresso dalla formola:

$$t = t_1 + \frac{t_1 - t_2}{l_n \frac{r_1}{r_2}} l_n \frac{r_2}{r} \qquad (1)$$

Si conservino le ipotesi della teoria tecnica delle travi ad asse curvo (conservazione delle sezioni piane e dilatazione nulla nella direzione del

raggio di curvatura) e si osservi poi che le dilatazioni termiche rientrano nella categoria delle dilatazioni anelastiche e inoltre, dipendendo da una variazione non uniforme della temperatura, determinano perciò nel solido un ulteriore stato di deformazione (coazione elastica). Chiamando ε_t la dilatazione totale della fibra generica nella direzione della tangente (normale alla sezione), ε_{te} la dilatazione elastica ed ε_{ta} quella anelastica, si avrà:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{te} + \varepsilon_{ta}. \tag{2}$$

Indicando con t il valore della temperatura della fibra generica e con α il coefficiente di dilatazione termica lineare del materiale, deve essere:

$$\varepsilon_{ta} = \alpha (t - t_0) \tag{3}$$

e ricordando che $\varepsilon_t = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta r}{r + v} + \omega$ dove Δ indica la variazione prodotta dalla deformazione, ω la dilatazione angolare, $ds = r d\varphi$ la lunghezza dell'arco generico, si ha anche dalle (2) e (3):

$$\varepsilon_{te} = \frac{\Delta r}{r + v} + \omega - \varepsilon_{ta} = \frac{\Delta r}{r + v} + \omega - \alpha (t - t_0). \tag{3'}$$

Ciò posto si osservi che le azioni elementari dipendenti dallo stato di coazione elastica dovranno avere risultante e momento risultante nulli, per non turbare l'equilibrio del tronco e dovranno pure dar luogo — insieme alle dilatazioni termiche — a dilatazioni complessive compatibili con il principio della conservazione delle sezioni piane [1]). Si concluderà quindi che le deformazioni totali sono quelle stesse che nel tronco privo di dilatazioni anelastiche, sarebbero prodotte dalle « sollecitazioni ideali anelastiche » [2]) definite dalle relazioni:

$$N_a = E \int_A \varepsilon_{te}\, dA \qquad \text{e} \qquad M_a = E \int_A \varepsilon_{ta}\, v dA. \tag{4) (5}$$

I valori che le soprascritte sollecitazioni ideali anelastiche assumono nel caso in esame sono i seguenti:

$$N_a = E\alpha \int_A (t - t_0)\, dA = EA\alpha t_m \tag{4'}$$

---

[1]) V. a proposito il procedimento generale esposto dal prof. C. L. Ricci nella nota « *Calcolo statico approssimato di coazioni elastiche nelle travi e negli archi* » Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze, XXI Riunione, Roma 1932 - X.

[2]) V. la nota innanzi citata a pag. 5.

dove t_m è il valore dell' ordinata media del tratto PQR del diagramma delle temperature (fig. 1 *b*) espresso, in base alla legge logaritmica data dalla (1) da

$$(6) \qquad t_m = \frac{\dfrac{t_1 - t_2}{l_n \dfrac{r_2}{r_1}} \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} l_n \frac{r_2}{r}\, dr}{r_2 - r_1} = \frac{t_1 - t_2}{(r_2 - r_1)\, l_n \dfrac{r_2}{r_1}} \left\{ r_2 - r_1 \left(1 + l_n \frac{r_2}{r_1} \right) \right\}.$$

D' altra parte il valore di M_a sarà espresso da:

$$(5') \qquad M_a = EA\alpha t_m v_0 = N_a v_0$$

dove v_0 è la distanza del baricentro del tratto PQR del diagramma della temperatura, dall' asse delle u. Per l' espressione di v_0 si ha:

$$(7) \qquad v_0 = \frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} (t - t_2)(r_2 - r)\, dr}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} (t - t_2)\, dr} - v_e = \frac{r_1^2 - r_1 r_2 \left(1 + l_n \dfrac{r_2}{r_1} \right) + \dfrac{r_1^2}{2} l_n \dfrac{r_2}{r_1} - \dfrac{1}{4}(r_2^2 - r_1^2)}{r_2 - r_1 \left(1 + l_n \dfrac{r_2}{r_1} \right)} - v_e .$$

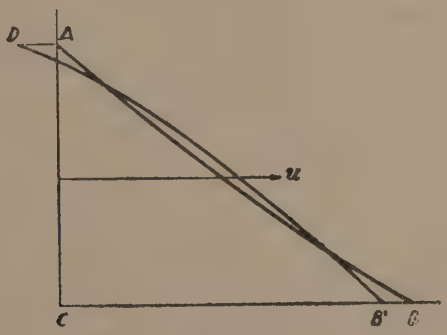


Fig. 2.

Risulta infine che il tronco di solido ha così in ogni sezione retta un diagramma di tensioni unitarie rappresentato in fig. 2 dall' area intrecciata $ADBB'$; il diagramma delle tensioni ideali anelastiche sarà rappresentato, secondo la (3) dalla curva logaritmica AB, riferita alla fondamentale AC, ed infine le tensioni effettive — derivanti dallo stato di coazione elastica — saranno rappresentate dal diagramma intrecciato $ADBB'$, compreso fra la linea AB e la linea DB' [1]).

[1]) Dalla teoria dei solidi a grande curvatura è noto che la linea DB' è una iperbole equilatera.

La linea DB' dovrà — per l'equilibrio — essere linea di compenso del diagramma delle tensioni ideali anelastiche; dovrà cioè l'area $ADB'C$ essere equivalente all'area ABC (nulla l'area intrecciata) ed i baricentri dei due diagrammi giacere sulla stessa parallela all'asse delle u. Le tensioni effettive sono date, anche in base alla (2) da:

$$(8) \qquad \sigma_t = E\,\varepsilon_{te} = \frac{1}{A}\left\{N_a + \frac{M_a}{r}\left(1 \pm \frac{v}{k\,(r \pm v)}\right)\right\} - E\,\varepsilon_{ta}$$

$\left(k = \text{coefficiente di forma} = -\frac{1}{A}\int_A \frac{v}{r+v}\,dA\right)$. La variazione di curvatura sarà infine,

$$(9) \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{M_a}{EAkr^2}\,.$$

1.ª Applicazione. — Il procedimento innanzi esposto permette di calcolare le sollecitazioni che derivano da una variazione di temperatura di un tronco di arco piano a grande curvatura; se il tronco fa parte di un complesso staticamente determinato, l'effetto della temperatura si riduce ad una deformazione dell'asse geometrico del solido, calcolabile con le (4), (5) e (9) in funzione dei valori della temperatura.

Se il tronco fa invece parte di un sistema iperstatico, sono impediti gli spostamenti di alcune sezioni delle membrature costituenti il sistema; di qui nascono corrispondenti valori delle reazioni dei vincoli sovrabbondanti.

Si tratti, in questo secondo caso, di un tronco cilindrico a sezione di corona circolare — tubo — sia t_1 la temperatura interna e t_2 quella esterna,

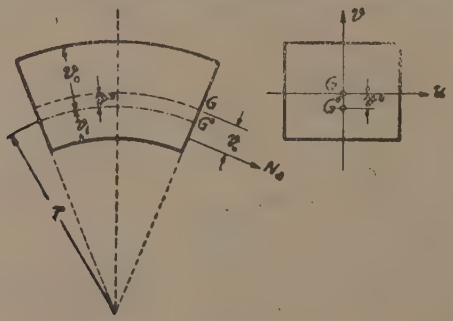


Fig. 3.

con $t_1 > t_2$. Per ogni tronco in cui si può dividere in tubo mediante piani passanti per l'asse longitudinale, si possono determinare le caratteristiche N_a ed M_a della sollecitazione ideale anelastica. Ciò posto si riferisca il momento della risultante N_a non più al baricentro G della sezione trasversale, ma al punto G^* distante da quest'ultimo della quantità $v^* = -r\frac{k}{1+k}$:

dalla teoria degli archi piani a grande curvatura è noto che il punto G^* va considerato come baricentro elastico di un tronco elementare di ampiezza angolare $d\varphi$ e che il luogo dei punti G^* rappresenta l'asse geometrico ridotto del solido.

Ai fini della soluzione del problema iperstatico, osserviamo che il sistema elastico che consideriamo si può rendere staticamente determinato praticando un taglio secondo una sezione radiale qualunque (rendendo così semplicemente connesso il solido). Le due facce del taglio, per effetto della descritta variazione termica, subiranno uno spostamento relativo, che, per evidenti ragioni di simmetria, si riduce ad una rotazione intorno al centro di curvatura dell'asse geometrico (centro dell'anello). Tale rotazione, per i teoremi già sopra citati ed applicati, sarà quella dovuta al momento M_a^* — ideale anelastico — rispetto al centro G^* dato da:

$$M_a^* = N_a(v_0 - v^*).$$

D'altra parte, per non meno evidenti ragioni di simmetria ed anche per le condizioni di equilibrio p. es. di un mezzo anello, dato che sono nulle le pressioni sull'intradosso, le forze trasmettentesi attraverso le facce del detto taglio (pari alle tensioni interne in una sezione radialè qualunque), devono presentare nullo lo sforzo normale ($N = 0$) e perciò ridursi ad un momento flettente M che, dovendo annullare la rotazione provocata da M_a^*, dovrà essere proprio uguale allo stesso M_a^*, cioè $M = M_a^*$.

Le sollecizazioni saranno quindi per l'intradosso e l'estradosso, in conformità della (8) se $t_1 > t_2$

$$(9) \qquad \begin{cases} \sigma_i = \dfrac{M_a^*}{Ar^*}\left[1 - \dfrac{v_i}{k(r^* - v_i)}\right] - E\alpha(t_1 - t_2) \\ \sigma_e = \dfrac{M_a^*}{Ar^*}\left[1 + \dfrac{v_e}{k(r^* + v_e)}\right] \end{cases}$$

sono ovvie le trasformazioni che subiscono le formule precedenti se $t_1 < t_2$.

Si applichi il procedimento innanzi esposto, ad esempio, ad un tubo di calcestruzzo lungo un metro, per il quale sia $r_1 = 65$ cm., $r_2 = 90$ cm., sarà $A = 2500$ cmq. sia $t_1 = 60°$, $t_2 = 20°$, $\alpha = 0{,}00001$, $E = 200.000$ Kg./cmq.

Applicando la (6) risulta $t_m = 18°{,}9$ inoltre essendo per la (7) $v_0 = 4{,}39$ cm., $k = 0{,}0088082$, $r = 76{,}8233$ cm., $v^* = 0{,}676667$ cm. si ottiene $N_a = EA\alpha t_m =$ 94.600 Kg., $M_a^* = N_a(v_0 - v^*) = 351.281$ Kg. cm.; di conseguenza per le (9) $\sigma_i = -45{,}45$ Kg./cmq., $\sigma_e = -27{,}70$ Kg./cmq.

II.ª Applicazione. — Si consideri poi un arco a grande curvatura (fig. 4) ad asse circolare ed a sezione trasversale costante, di luce L, sia t_2 la temperatura dell'intradosso, t_1 quella dell'estradosso con $t_1 > t_2$ si

divida al solito l'arco in un sufficiente numero di tronchi e si consideri svincolato l'estremo B, fisso l'estremo A. Indicando con $dw = \frac{ds^*}{EI}$ il peso elastico di ciascun tronco [1]), con W il peso elastico totale e con $\Delta d\varphi$ la rota-

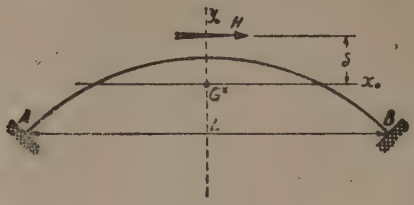


Fig. 4.

zione di ciascun tronco rispetto al precedente, si ha, con i simboli e le formule della trattazione precedente:

$$\Delta d\varphi = M_a^* \, dw = EA\alpha \, t_m (v_0 - v^*) \, dw$$

e quindi la rotazione ϑ della sezione estrema B rispetto al baricentro G^* dei pesi elastici, sarà, ovviamente:

$$\vartheta = M_a^* \, \Sigma dw = EA\alpha \, t_m (v_0 - v^*) \, W. \tag{10}$$

La variazione di lunghezza della corda, per effetto dello sforzo normale N_a agente in ciascun tronco, sarà:

$$\Delta L = \alpha t_m \, L^* \text{ [2])}. \tag{11}$$

Ripristinando l'incastro B le due deformazioni espresse dalle (10) e (11) dovranno venir annullate per effetto dei parametri della reazione dell'imposta B che si ridurranno ad un momento e ad una reazione orizzontale. Per evidenti ragioni di simmetria questa reazione deve essere parallela alla corda AB ed agire rispetto al baricentro elastico G^* con un braccio δ, tale da provocare ivi un momento capace di annullare la rotazione totale espressa dalla (10). Indicando con H la reazione orizzontale [3]) si dovrà quindi avere $H\delta = M_a^*$ ed essendo com'è noto:

$$H = \frac{\alpha \, t_m}{J_{x0}} L^* \tag{12}$$

---

[1]) Ricordando quanto si è detto a pag. 5 relativamente al punto G^* ed all'asse geometrico ridotto, risulta $ds^* = \frac{ds}{1+k}$.

[2]) L^* è la lunghezza della corda sottesa all'arco di raggio r^*.

[3]) La spinta H avrà verso e posizione opposta a quella di fig. 4 se $t_1 > t_2$.

dove J_{x_0} rappresenta il momento d'inerzia dei pesi elastici rispetto all'asse x_0 orizzontale baricentrico della distribuzione totale dei pesi elastici, ne consegue:

$$\delta = \frac{EA}{L^*}(v_0 - v^*) J_{x_0}. \tag{13}$$

Conosciuto così il valore della spinta e la sua eccentricità rispetto al baricentro elastico, riesce agevole, per ogni sezione dell'arco, il calcolo delle sollecitazioni dipendenti dalle coazioni termiche.

Si applicano a titolo di esempio le formule dianzi esposte ad un anello di un metro di larghezza di un arco di calcestruzzo ad asse circolare, con raggio all'intradosso $r_1 = 9$ m. e raggio all'estradosso $r_2 = 10$ m., freccia all'intradosso di m. 3,20, ponendo poi $t_1 = 50°$, $t_2 = 5°$ ed $E = 200.000$ Kg./cmq., $\alpha = 0.00001$.

Analogamente a quanto si è fatto per l'esempio di pag. 5 si sono trovati i valori delle diverse caratteristiche della sezione cioè:

$v_0 = 0.16$ m. $\quad v^* = 0.3087$ m. $\quad r^* = 9.491$ m. $\quad L^* = 15$ m.

Diviso poi l'arco in 10 tronchi, con i noti procedimenti grafici si sono ottenuti: la posizione del baricentro dei pesi elastici G^* (a m. 1.70 dalla corda) ed il valore di $EJ_{x_0} = 243{,}64$ m.$^{-4}$, applicando poi la (13) è risultato $\delta = 2{,}4667$ em e, per la sezione di chiave in base alle (9), $\sigma_e = 10.28$ Kg./cmq. $\sigma_i = -95.30$ Kg./cmq. per le sezioni di imposta $\sigma_e = 70.76$ Kg./cmq., $\sigma_i = -159.24$ Kg./cmq.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni della R. Università, agosto 1941 - XIX.

FILIPPO BOTTAZZI

Commemorazione letta dal prof. **Gaetano Quagliariello**

(Adunanza del dì 6 dicembre 1941-XX)

Il 19 settembre u. s. alle ore 10, in Diso (prov. di Lecce), finiva la sua vita terrena Filippo Bottazzi. Con Lui è scomparsa la figura maggiore della Fisiologia italiana contemporanea.

Era nato il 23 dicembre 1867 da Giuseppe, pittore la cui fama fu certamente inferiore ai meriti, e da Cecilia Bortone, donna di esemplari virtù cristiane e di grande energia, la cui memoria è ancora viva e rispettata fra i cittadini di Diso.

Fece con onore, gli studi secondari nel Liceo-Ginnasio di Maglie e nel 1887 s' iscrisse alla Facoltà di Medicina dell' Università di Roma. Sebbene in questa scelta, più che la propria inclinazione, che Lo avrebbe indotto a studiare lettere, seguisse i voti della mamma ch' Egli adorava, fu studente d' eccezione, vincendo per ben cinque volte di seguito il premio Rolli e il premio biennale Corsi e riuscendo primo nel concorso dei medici aggiunti negli Ospedali di Roma. La sua tesi di laurea, giudicata dalla Commissione degna di stampa, ottenne il premio Girolami.

Appena laureato fu per qualche mese medico condotto (interino) in un paesetto della sua provincia, e la sua solida preparazione unita al più alto senso del dovere gli procurò in breve tempo la stima e la fiducia di quella popolazione. Ma la soddisfazione che queste gli procuravano non valse a vincere la passione per la ricerca scientifica che era nata in Lui frequentando i laboratori della Università romana, particolarmente quelli di Todaro e di Marchiafava che Lo ebbero assai caro, laboratori nei quali aveva già compiute le prime indagini sperimentali i cui risultati furono oggetto delle sue prime pubblicazioni. Accettò, pertanto, con entusiasmo l' offerta del posto di Aiuto nell' Istituto di Fisiologia di Firenze, diretto da Giulio Fano.

Egli aveva trovato la sua via, via che doveva percorrere tanto luminosamente, fino a raggiungere in pochi anni una posizione di primo piano nel mondo biologico internazionale.

L' attività del Nostro durante i suoi 8 anni di permanenza a Firenze è meravigliosa. Sono dei suoi primi anni fiorentini le ricerche sulla funzione della milza e le prime sulla funzione del sarcoplasma nel tessuto muscolare che destarono grande interesse e discussione fra i biologi italiani e stranieri, come pure la scoperta della mobilitazione dei potassio-ioni nel cuore

FILIPPO BOTTAZZI

Nato il 23 dicembre 1867 Morto il 19 settembre 1941

per eccitamento del vago, concezione ripresa più tardi dall' Howell e che contiene in sè il germe della modernissima dottrina della trasmissione chimica (umorale) dell' eccitamento nervoso. In questi stessi anni (1896) conduceva a termine la traduzione dal tedesco dell' opera di Edinger « *Sulla struttura degli organi nervosi centrali dell' uomo e degli animali* » arricchendola di note e di figure originali, traduzione che insieme con le sue prime ricerche dell' epoca romana sul cervello dei Selaci e sulle fibre nervose corticali stanno a dimostrare come Egli, prima di affrontare lo studio dei problemi funzionali, si fosse costituita una solida preparazione morfologica.

Nel 1896, a tre anni dalla laurea, conseguì la libera docenza in Fisiologia e l'anno seguente iniziò nell'Istituto di Fisiologia di Firenze un corso di Chimica fisiologica, che, secondo la testimonianza di qualche studente dell' epoca, destò grande interesse tra i giovani per la novità della materia trattata e per l' entusiasmo e l' efficacia didattica dell'insegnante. Fu evidentemente nel dettare tale corso che Egli concepì l' idea di scrivere un trattato di Chimica fisiologica, e senza interrompere la sua opera di ricercatore e di insegnante si mise con entusiasmo alla nuova fatica. Ma intanto la rinomanza che le sue ricerche sperimentali e l'articolo magistrale pubblicato sulla « *Fisiolagia generale del cuore* » nel *Dictionnaire de Physiologie* di Ch. Richet, gli avevano procurato in Italia e fuori, gli valse l'altissimo onore di essere invitato da uno dei maggiori fisiologi viventi, Sir Michael Foster, a svolgere un corso pratico di Fisiologia per gli « *advenced students* » nell' Istituto di Fisiologia nella R. Università di Cambridge. Malgrado le oneste accoglienze, la larga ospitalità ed il buon successo del suo corso, Egli vi rimase soltanto un semestre, chè le nebbie del cielo inglese e la severità puritana della vita dei *College* gli fecero ben presto nascere nell' anima una profonda nostalgia del bel cielo italico e della franca e cameratesca vita fiorentina.

Tornato a Firenze condusse a termine e pubblicò verso la fine dello stesso 1898 il Trattato di Chimica fisiologica, che fu il primo in Italia (dove unico rimase per moltissimi anni) e uno dei primi nel mondo e che rispondendo a un generale bisogno del mondo scientifico riscosse entusiastico consenso, di cui si fecero interpreti Ch. Richet, che lo definì il miglior trattato di Chimica fisiologica in tutte le lingue e H. Boruttau che ne pubblicò una traduzione in lingua tedesca.

Aveva appena licenziato alle stampe il suo Trattato, che il Nostro, quasi a rendere omaggio all'insigne Maestro che gli aveva aperte le non facili porte dell' Università di Cambridge, intraprese una nuova fatica, la traduzione dall' inglese in italiano del suo classico Trattato di Fisiologia che l' anno seguente venne pubblicato dal Vallardi in 4 volumi.

È veramente meraviglioso come questa intensa attività di trattatista e di traduttore, non nuocesse a quella, a cui più teneva, di sperimentatore

e d'insegnante, che anzi con l'approfondirsi ed allargarsi della sua cultura nuovi problemi si presentavano al suo spirito indagatore. Sono di questi anni infatti le sue prime ricerche di Fisiologia comparata, compiute nella Stazione Zoologica di Napoli, e quelle di Chimica fisiologica che dovevano in seguito condurlo a risultati che sono oggi patrimonio della nostra scienza.

E nel campo dell'insegnamento, accanto al corso di Chimica fisiologica, nell'anno 1908-1909 ne dettò uno di Tecnica fisiologica, e nel 1901-1902 per incarico della Facoltà di Lettere e di Filosofia uno di Biologia generale, di cui ci resta la prolusione « Biologia e Filosofia » che è la prima manifestazione del carattere filosofico ed eminentemente generalizzatore della sua mente.

Ma intanto l'anno seguente (1902), a nove anni appena dalla laurea, riusciva primo nel concorso alla Cattedra di Fisiologia nella R. Università di Genova, cattedra che occupava sino al 1904 quando veniva trasferito nella nostra Università di Napoli, chiamato per voto unanime di questa Facoltà Medica.

Giunto a Napoli nel pieno vigore delle sue forze fisiche e intellettuali con un vasto programma di rinnovamento da attuare sia nell'insegnamento sia nell'organizzazione del laboratorio, suscitò dapprima una certa diffidenza non scevra da qualche ostilità, ma con indomita energia, senza deflettere di un pollice dal suo programma, Egli riuscì ad imporre la sua personalità e a conquistarsi la stima di tutti i Colleghi e quella degli studenti, che fino all'ultimo giorno del suo insegnamento Lo seguirono con ammirazione e Lo considerarono Maestro di eccezione. Il laboratorio di Fisiologia di Napoli quando Egli ne assunse la direzione era in condizioni di quasi abbandono, privo di apparecchi scientifici, di libri e di ogni organizzazione di lavoro, ma Egli riuscì in pochi anni a dotarlo di una attrezzatura completa e moderna ed a farne il più attivo centro di ricerche biologiche della Nazione e la più ricercata palestra per l'addestramento dei giovani che numerosi vi accorsero da tutte le parti d'Italia e dall'estero. E con vera passione, giovandosi delle sue numerose relazioni personali e in seguito della diffusione dei giornali da Lui fondati, curò l'arricchimento della Biblioteca, che più tardi riuscì a collocare nel vecchio refettorio del Convento di S. Andrea delle Dame, per suo interessamento restaurato e dichiarato monumento Nazionale, facendone la più completa e ricca Biblioteca biologica delle Università d'Italia.

Tanto fervore di organizzazione non Lo distolse dal lavoro scientifico. Nel 1906 pubblicava quell'aureo libretto che è « Il metodo sperimentale nelle discipline biologiche » che gli valse il premio ventennale Bufalini, e gli « Elementi di chimica fisica » che aprirono nuovi orizzonti ai giovani biologi italiani, e che furono accolti con grande favore anche dai chimici, che fino allora non avevano un trattato italiano della materia. Le sue ricerche personali e quelle compiute sotto la sua direzione sulla costituzione

chimica e chimico-fisica del citoplasma e dei liquidi dell'organismo gli procuravano tale autorità nell'argomento, che tutti i compilatori dei grandi trattati di Biologia che in quel tempo si venivano pubblicando in Germania richiesero la sua collaborazione, il cui frutto sono 4 magistrali monografie pubblicate tra il 1907 e il 1911 nel trattato *Physikalische Chemie und Medizin* di KORANYI e RICHTER, negli *Ergebnisse der Physiologie*, nel trattato *Der Harn* di NEURBERG e nel grande trattato di Fisiologia comparata di WINTERSTEIN, monografie che ebbero fra l'altro il grandissimo merito di far conoscere all'estero la produzione biologica italiana.

E nello stesso giro di tempo pubblicava (1911), in collaborazione con G. JAPPELLI, un manuale su la « Fisiologia dell'Alimentazione con speciale riguardo all'alimentazione delle classi povere » che rappresenta la prima manifestazione esteriore del suo orientamento verso questo fondamentale problema sociale, al quale, per altro, già dall'inizio del suo insegnamento a Napoli, dedicava ogni anno un certo numero di lezioni.

Ma fu in occasione della guerra europea, durante la quale come delegato del Governo italiano in seno alla « Commission scientifique interalliée du Ravitaillement » difese, con l'autorità che gli derivava dalla sua indiscussa competenza scientifica e con la sua abituale energia centuplicata dalla santità della causa, il diritto dell'Italia a ricevere una quota di viveri adeguata alla sua popolazione, al numero e alle fatiche dei suoi combattenti, fu in tale occasione che apparve chiaro alla sua mente ed alla sua coscienza l'importanza del problema alimentare per l'avvenire della Nazione. Persuaso che tale problema andava non solo studiato nei laboratori ma agitato nel Paese in modo da destare in questo una coscienza alimentare, mentre promuoveva nel suo laboratorio ricerche sperimentali sulla nutrizione, iniziava un'attiva opera di propaganda con conferenze fatte da Lui stesso e dai suoi più immediati collaboratori in varie città d'Italia e con la pubblicazione (1919) di un manuale su « L'alimentazione dell'uomo » e di una serie di articoli divulgativi sui giornali professionali e politici. Fondato per volontà del Regime il Consiglio Nazionale delle Ricerche, Egli, chiamato a presiedere il Comitato Biologico, volle subito la creazione di una Commissione per lo Studio dei Problemi dell'Alimentazione alla quale Egli stesso, svolgendo la più paziente opera di persuasione presso i rappresentanti delle nostre maggiori industrie chimiche ed alimentari, procurò larghi mezzi di lavoro. Potè così chiamare intorno a sè una schiera di giovani, che nel suo laboratorio e in altri laboratori universitari ed extrauniversitari hanno compiuto e vanno tuttora compiendo ricerche chimiche e fisiologiche destinate, da una parte, a farci conoscere la composizione chimica e il valore nutritivo delle sostanze alimentari prodotte nella nostra terra, dall'altra a far sì che il contributo italiano al progresso della Scienza della Nutrizione sia degno della nostra tradizione scientifica.

Questo pensiero e questo desiderio della elevazione e della valorizza-

zione della Scienza italiana fu altra costante passione del Nostro. Egli, come tutti gli uomini di scienza, non fu uomo di parte, ma amò senza restrizioni mentali la Patria, e durante la guerra europea, non avendola potuta servire con le armi, la servì fedelmente e nobilmente non solo nel consesso internazionale al quale, come ho ricordato, la fiducia del Governo volle chiamarlo, ma anche come capo della sezione napoletana dell' Associazione nazionalista, lavorando disciplinatamente, accanto a Enrico Corradini, Luigi Federzoni e Francesco Coppola della cui amicizia era orgoglioso, a mantenere alta e ferma nel Paese la fede della vittoria. E dopo la vittoria aderì senza esitare ai Fasci di combattimento intuendo nel fondatore di essi « l' uomo più lungimirante e chiaroveggente dell' Italia moderna ».

E nazionalista fu anche nella scienza, ma non « campanilista » perchè, se pure con rammarico, riconosceva che il primato della fisiologia sperimentale, nata in Italia con Leonardo da Vinci e giunto ai suoi più alti fastigi con Lazzaro Spallanzani, non era più dell' Italia, e che al progresso delle Scienze è oggi indispensabile la conoscenza e il giusto apprezzamento di quanto si fa e si pensa in tutti i paesi del mondo. Ebbe cara perciò l' amicizia dei maggiori biologi stranieri del suo tempo e rappresentava da anni l' Italia nei consessi internazionali e fu membro delle maggiori Società scientifiche dell' Europa e delle Americhe. Ma volle sempre che la Scienza italiana conservasse la sua individualità ed esprimesse italianamente il suo pensiero. Nei congressi internazionali pretese che gli italiani facessero le loro comunicazioni in lingua italiana e che i lavori compiuti nei laboratori delle Università italiane venissero pubblicati in lingua italiana in giornali italiani. A facilitare ai giovani ricercatori il compimento di questo dovere fondò nel 1919 l' « Archivio di Scienze Biologiche », che è ormai al suo 27° volume, concedendo agli Autori agevolazioni per quei tempi favolose. E più tardi, nel 1934, fondava i » Quaderni della Nutrizione » che negli otto volumi fin' oggi pubblicati raccolgono il meglio di quanto si è fatto in Italia, soprattutto per suo impulso, nella Scienza della Nutrizione. Ma soprattutto ha il merito di aver fondata nel 1925 e condotta a vita rigogliosa la Società Italiana di Biologia Sperimentale, che raccoglie in un' unica famiglia tutti gli italiani studiosi di scienze biologiche e che nelle brevi comunicazioni del suo « Bollettino » — sino ad oggi 16 volumi di circa 1000 pagine ciascuno — esprime il pensiero e l' attività biologica del nostro Paese.

Curioso di tutti i fenomeni della natura, verso il 1908 la sua attenzione fu attratta verso i fenomeni medianici ed organizzò nel suo laboratorio una serie di sedute col medium Eusapia Paladino, sedute alle quali intervennero diversi scienziati di Napoli e di fuori. I risultati delle indagini, condotte con ogni possibile rigore scientifico, lo persuasero dell' effettiva esistenza dei fenomeni, dei quali diede una precisa descrizione in un libro di ben 240 pagine edito nel 1909 dal Perrella di Napoli. Il libro destò grande interesse tanto che ben presto l' edizione fu esaurita, ma Egli non volle mai ripub-

blicarlo e dopo di allora mai più volle occuparsi di fenomeni medianici, convinto, forse, dalla giustezza del precetto di Leonardo che non convenisse occuparsi di « cose improvabili, quando quelle che con esperienza ognora si possono chiaramente conoscere e provare sono per tanti secoli ignorate e falsamente credute ».

Interessante ad ogni modo che nel tentativo di spiegazione che Egli fece dei fenomeni medianici è scartata con cura ogni ipotesi che possa contrastare anche lontanamente coi dogmi della Religione Cattolica, nella quale era stato educato e verso la quale fu sempre rispettoso. Questo orientamento del suo spirito gli permise di comprendere appieno la nobiltà e la bellezza dell'anima del suo grande allievo Giuseppe Moscati, al quale si legò con affettuosa amicizia, amicizia dalla quale la sua Fede religiosa fu illuminata e fortificata.

E quando un morbo inesorabile gli portò via nel fiore degli anni l'adorata figliuola, seppe fare del suo dolore uno strumento di elevazione della sua anima verso Dio e a Dio offrì le atroci sofferenze della lunga malattia che Lo ha condotto alla morte.

Ma Egli sopravvive nelle sue opere di sperimentatore e di Maestro.

Sperimentatore abile e sagace, Egli non fu un arido elencatore di fatti, ma illuminò col suo pensiero i fatti osservati coordinandoli in unità armoniche per trarne nuove leggi e nuove ipotesi di lavoro.

Così, per ricordare i frutti più geniali della sua attività, quando Egli osserva che la resistenza all'emolisi dei corpuscoli rossi del sangue reduce dalla milza è diminuita in confronto con quella dei corpuscoli della circolazione generale, suppone che la milza abbia l'ufficio di preparare i corpuscoli all'azione disgregatrice del fegato e scopre l'azione emocatatonistica della milza. Quando intraprende lo studio della pressione osmotica e della conduttività elettrica dei liquidi interni degli animali marini, intuisce i rapporti che passano tra liquidi interni e l'ambiente liquido in cui gli animali vivono, e scovre la legge della omeosmoticità e pecilosmoticità degli organismi animali. Quando, studiando la funzione dei muscoli, dimostra che questi, indipendentemente dalla innervazione centrale, sono dotati di duplice contrattilità: contrattilità rapida o clonica e contrattilità lenta o tonica, e che le due maniere di contrarsi possono essere provocate in ogni specie di muscoli, normali e denervati, con ogni specie di stimoli (elettrici, meccanici, termici, chimici), intravede la possibilità di un duplice substrato funzionale e suppone che l'attività tonica sia dovuta al sarcoplasma mentre la sola contrattilità rapida clonica sarebbe dovuta alle miofibrille striate. È questa la teoria della contrattilità del sarcoplasma, che rese celebre il nome del Bottazzi ancora giovanissimo, sollevando discussioni a favore e contro di essa. Le nuove prove portate dal Bottazzi con un decennale lavoro, hanno ridotto assai il numero degli avversari della sua teoria, ma quello che soprattutto importa è che nessuna delle osservazioni su cui essa

si fonda è stata smentita, e che con la sua teoria il Bottazzi ha dato nuovo e vigoroso impulso allo studio dei fenomeni tonici muscolari, riconducendo il concetto fisiologico di tono muscolare dal binario morto su cui giaceva fin dal 1896 su una via libera sulla quale poi moltissimi ricercatori lo hanno seguito.

Quando, infine, intraprende lo studio delle proprietà dei colloidi organici (proprietà ottiche, viscosità, tensione superficiale, imbibizione, elettroforesi, ecc.) illustra dapprima una serie di fatti nuovi e interessanti, alcuni, come quello delle relazioni tra punto isoelettrico e azione batotona delle proteine di fondamentale importanza, ma in un secondo tempo li coordina e li elabora nella sua mente poderosa e propone una nuova definizione e classificazione dei sistemi colloidali che suscita consensi e dissensi, ma la cui influenza sugli studi successivi e sull'attuale classificazione è manifesta. E più tardi enuncia ed illustra le sue idee sulla struttura del protoplasma, oggi generalmente accettate, che Egli considera come un sistema omogeneo otticamente vuoto che forma poi con le fasi in esso disperse di varia natura, un sistema otticamente pieno ed inomogeneo che è il citoplasma.

Accanto a quest'attività di ricercatore, che assicura al suo nome fama imperitura nella storia delle Scienze biologiche, un'altra ne svolse non meno proficua, che ne fa uno dei maggiori benemeriti dello sviluppo della cultura scientifica in Italia in quest'ultimo cinquantennio, e per la quale il ricordo di Lui resta grato e indelebile in quanti ebbero la ventura di conoscerlo intimamente e in modo particolare nei suoi discepoli. Filippo Bottazzi fu infatti un Maestro nel significato più nobile della parola e fu un instancabile attivatore delle energie dei suoi connazionali.

Dotato di larga cultura, d'intelligenza robusta e chiarificatrice, di parola facile e precisa, Egli fu insegnante di primissimo ordine. La profonda dottrina, la limpida chiarezza delle lezioni da lui dettate per oltre 40 anni, sempre con eguale fervore, affascinavano ed entusiasmavano la mente ed il cuore degli ascoltatori. Ma assai oltre la cerchia di questi si estesero i benefici del suo insegnamento, che Egli coi suoi Trattati di Chimica fisiologica e di Chimica fisica, già innanzi rammentati, ha offerto a diverse generazioni di giovani italiani il modo di formare la loro cultura.

Maestro grande ed indimenticabile fu, però, soprattutto nel laboratorio. Dai giovani, italiani e stranieri, che affascinati dal suo insegnamento o richiamati dalla sua fama chiesero ed ottennero di lavorare sotto la sua guida, Egli, nemico di ogni forma di dilettantismo, pretese la più severa disciplina di lavoro, ma diede in cambio ogni specie di aiuti materiali e morali, mettendo a loro disposizione tutti i mezzi di ricerca, la sua abilità di sperimentatore, il tesoro della sua cultura. E quel che forse più conta, Egli diede loro l'esempio di una vita semplice e modesta, di una instancabile laboriosità, del più assoluto disinteresse per il guadagno. Dei

discepoli che per suo incitamento si avviarono alla carriera scientifica Egli divenne padre e fratello, guidandoli e sorreggendoli nelle immancabili difficoltà della vita accademica e difendendoli a viso aperto in ogni congiuntura, anche dopo che raggiunta la cattedra essi si furono allontanati da Lui. E i suoi discepoli mai dimenticheranno la bontà e la generosità del suo animo.

Accanto a questa attività di insegnante e di Maestro un'altra ne svolse più modesta ma non meno utile ai fini della cultura nazionale, quella di divulgatore di conoscenze scientifiche attraverso riviste, giornali professionali e giornali politici, riuscendo, con rara abilità, ad adeguare il suo stile alla varia cultura dei lettori ai quali si rivolgeva. Ma dovunque scrivesse, Egli tenne sempre moltissimo alla esattezza scientifica delle nozioni impartite, alla precisione e alla correttezza del linguaggio, perchè non tollerava che queste qualità venissero sacrificate alle esigenze di una mal'intesa divulgazione.

Fiero delle glorie nazionali, profondo conoscitore della Storia del Rinascimento e particolarmente della Storia delle Scienze, il Bottazzi fu anche un felice evocatore di glorie scientifiche italiane. La vita e le opere di Lazzaro Spallanzani, di Luigi Galvani, di Carlo Matteucci, di Maurizio Bufalini ecc. furono da lui profondamente studiate ed illustrate. Di Spallanzani curò anche l'edizione delle Opere complete pubblicate dalla Accademia d'Italia. Ma soprattutto Egli fu un innamorato e uno studioso di Leonardo, del quale ha illustrato in maniera magistrale l'opera di naturalista e particolarmente di fisiologo.

Il primo articolo su Leonardo: «Leonardo da Vinci filosofo, naturalista e fisiologo» fu scritto da Lui nei primi anni della sua vita fiorentina, quando pieno di speranze e di entusiasmo iniziava la sua carriera accademica, e fu pubblicato nel 1902 ne «L'Archivio per l'Antropologia»; l'ultimo: «La mente e l'opera di Leonardo da Vinci», che comparirà postumo nelle Memorie della Pontificia Accademia delle Scienze, è stato scritto negli ultimi mesi della sua vita, quando la malattia ne aveva già fiaccate le forze fisiche, ma non la luce dell'intelletto e l'amore per l'arte e per la scienza. E certo a Lui, consapevole della prossima fine, consolatore sarà tornato nella mente il pensiero di Leonardo: «Sì come una giornata bene spesa dà lieto dormire, così una vita bene usata dà lieto morire», che bene spese Egli la sua vita e serena fu la sua morte.

A noi torna in mente un altro pensiero di Leonardo: «La misera vita non trapassi senza lasciare di noi alcuna memoria nella mente de' mortali» e la sicurezza che il suo nome resterà consacrato nella storia della Fisiologia ci allevia il dolore della sua dipartita.

L'ATTACCO ANODICO DELLA GRAFITE NELLA ELETTROLISI DEI CLORURI ALCALINI

Nota II dell'ing. **Mario M. Jacopetti,** *presentata dal socio* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 7 febbraio 1942-XX)

Sunto. — Con un nuovo metodo sperimentale, il quale permette di provare il comportamento degli anodi di grafite in condizioni equivalenti a quelle che si realizzano negli elettrolizzatori industriali per la produzione dell'idrossido dal cloruro di sodio, si sono continuate le esperienze destinate ad isolare l'influenza dei vari fattori sulla intensità dell'attacco anodico. Si riferiscono i risultati relativi alla durata dell'elettrolisi, alla densità di corrente, alla temperatura ed alla concentrazione alcalina nell'effluente catodico.

In una nota precedente [1]) si sono descritti un dispositivo sperimentale ed una tecnica di misura, atti ad eseguire lo studio dell'attacco anodico delle grafiti negli elettrolizzatori a diaframma e controcorrente per l'elettrolisi dei cloruri alcalini, in modo da riprodurre esattamente le condizioni dell'effettivo funzionamento industriale. Si sono in quella occasione riportati i risultati relativi alla influenza che la concentrazione dell'anolita in cloruri alcalini esercita sulla intensità dell'attacco e si è studiata altresì la influenza che esercitano gli joni SO_4^{--} e gli joni ClO_3^- i quali si trovano sempre presenti in quantità più o meno grandi, in dipendenza del grado di purezza del sale di partenza e delle condizioni di lavoro.

In questa nota si riferiscono i risultati relativi alla influenza che esercitano la durata di funzionamento, la densità di corrente, la temperatura e la concentrazione alcalina nell'effluente catodico.

Materiali adoperati e dispositivo sperimentale.

Gli elettrodi di grafite sono stati prelevati, con gli stessi criteri già precedentemente indicati, dai medesimi blocchi di grafite messi a nostra disposizione dalla S. A. Cellulosa, Cloro, Soda di Napoli e fabbricati dalla S. A. Elettrografite di Forno Allione.

Per completare tutte le esperienze abbiamo dovuto preparare due campioni di salamoia, A e B, di cui sono riportate qui appresso le composizioni,

---

[1]) JACOPETTI Mario M., *L'attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini.* Rend. R. Acc. di Scienze fis. e mat Soc. Reale di Napoli, serie 4ª, vol. X, pp. 1939-1940.

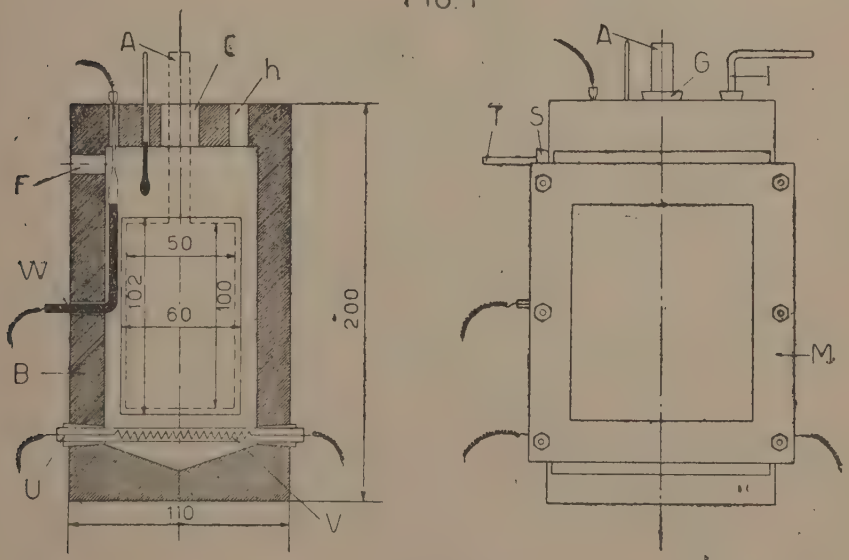
insieme con quella della salamoia fondamentale (C) adoperata nella precedente serie di misure:

	NaCl	Na_2SO_4
Salamoia A	318 g/l	2,2 g/l
Salamoia B	300 g/l	2,1 g/l
Salamoia C	287 g/l	1,9 g/l

I valori più alti del contenuto in cloruro realizzati questa volta sono compensati in parte dalla maggiore concentrazione in solfati, fattore questo che gioca in senso inverso.

Il dispositivo sperimentale era in tutto simile a quello già descritto nella nota precedente, con la sola differenza che le cassette della camera anodica erano costruite interamente in ebanite e non più in lamiera di ferro, rivestita d'ebanite. Ciò eliminava del tutto il pericolo di eventuali perdite per dispersione di corrente.

FIG. 1



Particolari difficoltà si sono avute per realizzare il riscaldamento della cellula ai fini di poter eseguire prove a temperatura più elevata e costante, a pari densità di corrente.

Si è dovuto ricorrere all'espediente di allogare un elemento riscaldante ed un termoregolatore entro la camera anodica superando le difficoltà dovute alla scarsezza di spazio. L'elemento riscaldante si è fatto passare in un tubo di quarzo, *U*, del diametro di circa 6 mm, che attraversa il fondo

della cella (fig. 1). La inserzione e la disinserzione di tale elemento riscaldante, costituito da una spiralina di nichel-cromo, *V*, la cui resistenza era stata opportunamente proporzionata, venivano automaticamente comandate da un piccolo termoregolatore, *W*, appositamente costruito per occupare il minor spazio possibile, e sistemato dentro la cella in maniera da non alterarne il funzionamento. Questo termoregolatore, attraverso un opportuno relé, comandava la inserzione o disinserzione dell'elemento riscaldante. Con tale dispositivo si riusciva a mantenere la cella alla temperatura di $60^0 \pm 1^0C$, costanza più che sufficiente per i nostri scopi sperimentali. Inoltre, sebbene l'elemento riscaldante fosse situato al fondo della camera anodica, in conseguenza della agitazione dovuta allo sviluppo dei gas agli elettrodi, sussisteva un energico rimescolamento dell'elettrolita, e la temperatura di tutto l'elettrolizzatore si manteneva uniforme.

Risultati sperimentali.

Poichè per una serie di ragioni è sempre difficile di eseguire prove della stessa durata, era in primo luogo necessario di accertare se con il crescere delle ore di utilizzazione crescesse anche il consumo specifico. A questo scopo si è utilizzato l'anodo 4 residuato dalle prove precedenti, il quale era risultato maggiormente corroso, e lo si è sottoposto di nuovo a prova, designandolo col numero 4 bis, in un piccolo elettrolizzatore, il quale è stato fatto marciare in serie con un altro munito di un elettrodo (7) in tutto simile, ma nuovo. Nello stesso circuito era inserito un terzo elettrolizzatore, anch'esso con anodo (6) di eguali dimensioni, il quale ha marciato con una intensità (e quindi con una densità) di corrente doppia.

Il circuito dei tre elettrolizzatori, disposti elettricamente in serie, era alimentato con una corrente sensibilmente costante prelevata da una grossa batteria di accumulalori e della intensità di 10 A: in parallelo alle celle 4 e 7, era però sistemata una opportuna resistenza capace di ridurre a 5 A il valore della intensità di corrente, che le attraversava. Due amperometri permettevano di controllare la costanza delle correnti; ed in realtà, una volta stabiliti i valori delle resistenze e raggiunte le condizioni di regime, le correnti si mantenevano praticamente costanti, senza necessità di ulteriori regolazioni.

La filtrazione attraverso i diaframmi e la circolazione indipendente dell'anolita sono stato regolate, con i seguenti criteri.

Per l'effluente catodico si è cercato di mantenere, in analogia con le prove precedenti, un valore « medio » della portata di 60 cmc orari.

Per quanto riguarda l'effluente anodico invece, il valore della portata è stato aumentato rispetto a quello adottato per la precedente serie di esperienze. Da queste era risultato che il consumo degli anodi di grafite è influenzato dalla concentrazione in cloruro sodico dell'anolita, nel senso che

al decrescere della concentrazione il consumo cresce. Le analisi dell'effluente anodico allora fatte, avevano mostrato che, con la portata realizzata, c'era ancora un apprezzabile impoverimento della soluzione. Pertanto, siccome nelle nuove esperienze si desiderava mettere in evidenza la influenza sul consumo di altri fattori, diversi dalla concentrazione dell'anolita, abbiamo voluto metterci nelle migliori condizioni possibili per quanto riguardava questo parametro, ed abbiamo cercato di mantenere la portata dell'affluente anodico intorno al valore di 200 cmc all'ora.

Questo valore della portata è stato mantenuto uguale per tutte le esperienze, e le analisi che periodicamente si sono fatte dell'effluente anodico hanno dato valori tra 285 e 292 g/l, dimostrando che si era soddisfacentemente raggiunto lo scopo.

Il gruppo dei tre elettrolizzatori in prova è stato alimentato con la salamoia A. La tabella I contiene i dati di funzionamento relativi alla marcia degli apparecchi: in essa V_c indica la portata oraria dell'effluente catodico, calcolata come media dal volume raccolto nelle 24 ore; t_c il contenuto in NaOH, espresso in g/l; η il rendimento percentuale di corrente, e V_a la portata oraria dell'eccesso di anolita, calcolata anch'essa come media dal volume raccolto nelle 24 ore.

Tabella I.

Data	V_c	t_c	η	V_a
Cella 4 bis: densità di corrente = 5 A/dmq; temperatura = 25° ÷ 28°C				
25-4	80,0	189	96,0	200
1-5	67,0	101	90,8	220
7-5	61,0	119	97,3	230
13-5	65,4	110	96,2	250
25-5	57,0	122	93,0	180
Cella n. 6: densità di corrente = 10 A/dmq; temperatura = 40° ÷ 42°C				
27-4	68,0	180	86,2	—
1-5	50,0	216	69,0	190
4-5	50,5	221	78,5	170
9-5	52,3	220	78,5	250
18-5	57,7	210	82,5	200
Cella n. 7: densità di corrente = 5 A/dmq; temperatura = 25° ÷ 28°C				
29-4	56,5	119	90,0	210
2-5	53,3	128	92,3	157
7-5	61,0	114	93,6	220
9-5	56,5	128	97,2	140
19-5	53,8	127	91,6	220

Segue Tabella I.

Data	V_c	t_c	η	V_a
Cella n. 7 bis: densità di corrente = 5 A/dmq; temperatura = 59° ÷ 61°C				
16-5	56,7	119	89,0	180
17-5	60,9	109	88,0	160
19-5	54,3	124	89,0	120

Gli elettrolizzatori 4 bis e 6 hanno funzionato per 39 giorni e sono stati attraversati rispettivamente da 4545 e da 9007 Ao; l'elettrolizzatore 7 ha funzionato invece soltanto per 25 giorni ed ha assorbito 2915 Ao.

L'elettrolizzatore 7 ha poi marciato ancora per 13 giorni con il riscaldamento elettrico indipendente, assorbendo nel complesso 1485 Ao e dando luogo ai dati di marcia che figurano sotto il numero 7 bis. Si è avuto così un elettrolizzatore, marciante a bassa densità di corrente ed a temperatura elevata (60°C).

I dati di funzionamento della tabella I dimostrano la buona regolarità di marcia e la soddisfacente riproduzione delle condizioni di lavoro industriale: i rendimenti medi per gli elettrolizzatori 4 bis e 7 sono di poco inferiori a quelli che si raggiungono nell'industria. Per l'elettrolizzatore 6, l'aver mantenuto una densità di corrente doppia con la stessa velocità di filtrazione attraverso il diaframma ha condotto a valori alti del titolo caustico nel catolita e ad un sensibile abbassamento della resa. Tuttavia essa, nelle condizioni di lavoro, non ha subìto una depressione troppo forte come ordinariamente si ritiene.

Gli anodi, trattati con la solita tecnica per eliminare completamente il sale, seccati e pesati, hanno mostrato le perdite di peso complessive e specifiche che figurano nella seguente:

Tabella II.

Elettrolizzatore	Perdita di peso		
	complessiva in g	specifica	
		in g/1000 Ao	in g/100 kg NaOH
1	3,14	0,57	39,9
4 bis	3,50	0,77	53,9
6	18,68	2,07	144,9
7	2,16	0,74	51,8
7 bis	3,69	2.49	174,3

A titolo di confronto figurano in questa tabella i risultati relativi al funzionamento dell'elettrolizzatore n. 1, utilizzato nella prima serie di esperienze, di cui si è dato relazione nella precedente nota già citata, sullo stesso argomento. Il divario tra i valori del n. 1 e del n. 7 può essere in piccola parte dovuto al maggior contenuto in solfati della salamoia A rispetto alla salamoia C; ma deve essenzialmente imputarsi al grado di riproducibilità dei risultati che il metodo stesso consente per prove eseguite a più di un anno di distanza.

Appare già, attraverso il confronto dei risultati relativi alle prove 4 bis e 7, che il consumo specifico non cresce col procedere del tempo di funzionamento. Notevolmente alto risulta invece il consumo specifico per l'anodo dell'elettrolizzatore 6, che ha lavorato con una maggiore densità di corrente e come conseguenza con un maggior titolo caustico (210 g/l circa in media contro 110) e ad una temperatura più alta (40° ÷ 42°C, contro 25° ÷ 28°).

Considerando i dati di consumo specifici relativi all'anodo 7 bis, che ha funzionato nelle stesse condizioni degli altri due (4 bis e 7) con la sola differenza della temperatura, e constatando che detti consumi superano anche quelli dell'elettrodo n. 6, che ha funzionato tuttavia a temperatura più bassa (40° ÷ 42°C, contro 59° ÷ 61°); si è indotti a pensare che l'azione più deleteria nell'esaltare l'attacco anodico è esercitata proprio dalla temperatura.

Per meglio discriminare l'influenza dei tre fattori: densità di corrente, titolo caustico del catolita e temperatura si è eseguito un ultimo gruppo di esperienze.

Sono stati montati altri due elettrolizzatori, con anodi dello stesso materiale, sempre con la stessa installazione e tenendo fermo tutto quanto esposto in precedenza per la loro marcia.

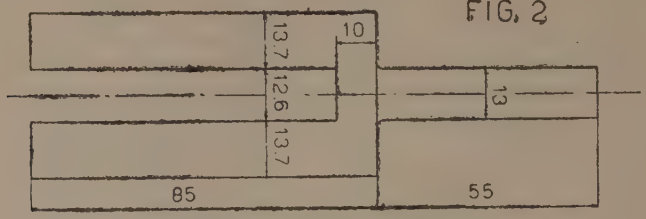
In uno degli elettrolizzatori si è montato un anodo n. 8, uguale a tutti gli altri, in modo da presentare una superficie attiva di un decimetro quadrato. Esso è stato fatto marciare a densità di corrente di 5 A/dmq., ma si è regolata la filtrazione attraverso i diaframmi in modo da mantenere la portata catodica intorno ai 25 cmc orari. Si é realizzato così un titolo caustico del catolita praticamente uguale a quello raggiunto con l'elettrolizzatore n. 6, senza alterare la densità di corrente e la temperatura: la cella marciando senza riscaldamento si è mantenuta ad una temperatura fra i 25° ed i 28°C, come era avvenuto per tutti gli altri casi.

Nell'altro elettrolizzatore (9) si è montato un anodo di cui si erano ridotte le dimensioni in maniera che la sezione normale alla corrente fosse poco meno della metà (0,48 dmq): anche questo elettrolizzatore ha lavorato con una intensità di corrente di 5 A, realizzando una densità di corrente di circa 10 A/dmq.

Nel ridurre le dimensioni si è realizzata la forma della fig. 2 per ottenere che la superficie anodica presupposta attiva fosse per quanto più possibile distribuita rispetto a quella catodica, in modo da raggiungere la più

uniforme distribuzione della corrente pur senza aumentare l'estensione della superficie laterale, la quale contribuisce anch' essa al passaggio della corrente. L' anodo 9 ha marciato quindi in condizioni normali nei riguardi della temperatura e della concentrazione dei liquidi anodico e catodico,

FIG. 2



mentre la densità di corrente all' anodo veniva ad essere quasi raddoppiata, corrispondente cioè a quella che si era verificata nella marcia dell'anodo 6.

Questo gruppo di elettrolizzatori è stato alimentato con la salamoia B; la tabella III contiene i dati di marcia ad essi relativi.

TABELLA III.

Data	V_c	t_c	η	V_a
Cella n. 8: densità di corrente = 5 A/dmq; temperatura = 25° ÷ 28°C				
29-3	23,2	212	66,6	180
1-4	25,0	195	65,8	200
7-4	25,7	191	65,8	200
12-4	27,5	178	65,8	200
22-4	30,4	187	72,8	250
Cella n. 9: densità di corrente = 10 A/dmq; temperatura = 25° ÷ 28°C				
6-4	46,6	113	69.6	—
12-4	55,2	116	86,4	230
16-4	59	118	92,6	260
23-4	48,6	119	77,5	—

L' elettrolizzatore 8 ha funzionato per 33 giorni ed è stato attraversato complessivamente da 3.968 Ao; mentre il funzionamento dell'elettrolizzatore n. 9 si è limitato a 25 giorni con un assorbimento di 3.072 Ao in totale.

Le condizioni di marcia sono anche qui abbastanza regolari e realizzano quanto si desiderava raggiungere. Le perdite di peso complessive e specifiche figurano nella seguente

Tabella IV.

Elettrolizzatore	Perdita di peso		
	complessiva in g	specifica	
		in g/1000 Ao	in g/100 kg NaOH
8	3,90	0,98	68,6
9	1,74	0,57	39,9

In tutte le prove effettuate non si è fatto alcun tentativo di separare la cosidetta « perdita meccanica » che comprende la grafite disgregata che cade al fondo della cella, dalla « perdita chimica » dovuta al carbonio effettivamente ossidato a CO_2 e che va a finire nei gas anodici. Effettivamente la conoscenza distinta di queste due grandezze può riuscire di grande utilità ai fini di apprezzare la qualità delle grafiti; ma nelle nostre condizioni sperimentali i tenori di CO_2 nei gas anodici erano così piccoli da rendere illusoria la loro determinazione. Nè era possibile di ricuperare la polvere di grafite disgregata al fondo della cella a causa della circolazione anodica e per la presenza dei diaframmi, i quali la trattengono in gran parte. Accertato l'effetto della temperatura sulla velocità di attacco si potrebbe forse tentare la determinazione dell'anidride carbonica nei gas anodici, di elettrolizzatori funzionanti a temperature elevate.

Discussione dei risultati.

1. L'ipotesi che con l'invecchiamento dell'anodo il consumo specifico vada crescendo non risulta confermata dai risultati ottenuti. Questa ipotesi, che rispecchia una convinzione abbastanza diffusa, trova la sua origine nei risultati di alcuni precedenti sperimentatori. Ad esempio Arndt [1]) riporta una tabellina dalla quale risulta un consumo crescente col crescere delle ore di utilizzazione. Ma questo risultato è, a nostro parere, sopratutto una conseguenza della tecnica sperimentale adottata, in particolare del metodo di prova accelerato che esegue la elettrolisi senza diaframma e senza rinnovare l'elettrolita. L'impoverimento di questo in cloruro e la formazione di composti ossigenati in grande quantità, debbono certamente portare ad un crescente attacco dell'elettrodo col crescere delle ore di utilizzazione. Nel nostro lavoro precedente anche noi avevamo formulato una simile ipotesi, per spiegare la notevole differenza fra i consumi da noi riscontrati e

[1]) Arndt K., *Die Kunstliche Kohlen*, pag. 170. Berlin, 1932.

quelli della comune pratica industriale. Le esperienze sulle quali ora si riferisce rendono questa ipotesi sempre meno probabile.

Risulta invece la notevole influenza della temperatura che, sugli elettrolizzatori industriali, sorpassa spesso anche i 60° C.

L'anodo 4, già in precedenza corroso, presenta un consumo specifico praticamente ugnale a quello dell'anodo 7 che era nuovo. È vero che questo consumo risulta più elevato anche per l'anodo 7 (nuovo) rispetto a quello riscontrato per l'anodo 1 nella prima serie di esperienze; mentre tale ultimo valore si riproduce poi in modo quasi perfetto per l'anodo 9 (nuovo) il quale ha lavorato nelle stesse condizioni di concentrazione e di temperatura e solo con densità di corrente più alta. Molto probabilmente tali differenze rientrano nei limiti di errore che il metodo stesso porta con sè, specialmente quando si eseguono diverse serie di esperienze a distanza di tempo, come abbiamo già in precedenza accennato.

Pur escludendo le grandi variazioni del consumo specifico con il crescere delle ore di utilizzazione, non è però da escludere che, nella pratica, per il fatto che con il progredire dell'attacco si vengono a formare cavità ed anfrattuosità entro le quali più rapidamente l'elettrolita si impoverisce in cloruro, possa col tempo aversi un limitato acceleramento della corrosione.

2. La densità di corrente non esercita di per sè alcuna influenza diretta sulla entità della corrosione. I risultati ottenuti con l'anodo 9, in confronto con quelli degli anodi 1 e 7, mostrano chiaramente questo fatto. Ad una più elevata densità di corrente corrispondono però nella pratica una più elevata temperatura di lavoro ed una maggiore concentrazione dell'alcali catodico. Sono questi fattori, e sopratutto il primo, che direttamente influenzano il consumo.

Infatti i risultati ottenuti con l'anodo n. 6 — per il quale insieme con la densità di corrente sono cresciuti la temperatura ed il titolo dell'effluente catodico — mostrano un sensibilissimo consumo specifico, circa triplo del n. 7 della corrispondente serie; ma questo valore è ancora più alto per l'anodo 7 bis, per il quale tutte le condizioni sono rimaste uguali a quelle del n. 7, meno la temperatura che è salita a 60°C.

3. La concentrazione in alcali del catolita ha una azione diretta sul consumo degli anodi. Ciò è da attendere senz'altro quando si pensa che la presenza degli joni ossidrili nel compartimento anodico deve dar luogo ad un forte sviluppo di ossigeno. Tuttavia il comportamento dell'anodo 8 — che ha lavorato in un elettrolizzatore dove il titolo caustico dell'effluente catodico era circa doppio di quello registrato per gli anodi 1, 7 e 9, pari essendo tutte le altre condizioni — dimostra che solo una minima parte degli joni OH^- migrati nella zona anodica, sfugge alla reazione con il cloro elementare:

$$OH^- + Cl_2 = HOCl + Cl^-.$$

4. L'azione più dannosa ai fini del consumo della grafite degli anodi è quella dovuta alla temperatura. I risultati relativi degli anodi 6, 7 bis, 8 e 9 mettono chiaramente in evidenza questo fatto. Il consumo elevato dell'anodo 6 è da attribuire anche in parte alla più elevata concentrazione in idrossido sodico del catolita; ma che l'azione di questo fattore non sia tale da poter giustificare il consumo riscontrato, è dimostrato dal buon comportamento dell'anodo 8, mentre quello relativo all'anodo 7 bis mostra in modo chiaro che un consumo anche più elevato può riscontrarsi per la sola azione della temperatura.

È da osservare però che la temperatura degli elettrolizzatori industriali non può essere tenuta bassa senza peggiorare in modo molto sensibile il consumo di energia.

L'Autore desidera esprimere i più vivi ringraziamenti al prof. GIORDANI per l'aiuto ed il consiglio ricevuti.

Napoli. Istituto di Elettrochimica della R. Università — Gennaio 1942 - XX.

Elementi matematici di base per una teoria delle collettività secondo la genetica

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

Adunanza del dì 9 novembre 1940 - XIX)

Sunto. — L' A. imposta (prendendo lo spunto da sue precedenti ricerche pubblicate in questi Rendiconti) le basi sulle quali occorre costruire una teoria statistico-matematica delle collettività biologiche.

1. In una recente Nota abbiamo trattato della evoluzione di una collettività di monoibridi mendeliani in presenza di fattori selettivi vari.

È necessario fissare alcuni capisaldi i quali danno la possibilità di sviluppi matematici — in senso probabilistico o deterministico, importa poco — e, che sono di basilare importanza.

Le quistioni anzidette nell'ordine col quale si susseguono nel fenomeno sono le seguenti:

I. Quali sono le leggi che regolano la formazione delle coppie?

II. Se vi sono fattori selettivi, in quali momenti e dove agiscono essi?

III. Nel caso di alleli multipli (caratteri presentanti più alternative) come si vincolano essi con la legge di dominanza?

IV. In quale modo avviene geograficamente il trasporto di un carattere insorto in una zona, nelle zone contigue?

V. Come evolve una collettività, nel senso che si avvicina a forme stabili oppure oscilla fra due posizioni alternativamente avvicinate?

VI. Data una collettività esaminata in certi suoi stadi, quali deduzioni si possono fare circa la sua costituzione genetica?

Noi le esamineremo in altro ordine.

2. Anzitutto si tratta di caratterizzare la formazione delle coppie-individui di secondo ordine, in una collettività.

Ci troviamo in presenza di due tipi di fenomeni diversi, nettamente distinti nei casi estremi.

Da un lato si ha la formazione di coppie in seno a collettività animali. Lo stesso fatto biologico dell' accoppiamento fa sì che il numero delle coppie formatesi — e quindi dei loro discendenti, coeteris paribus —, è proporzionale al numero degli individui, e con locuzione statistica occorre distinguere gruppi « chiusi » da gruppi « aperti ».

Da un altro lato si ha la formazione di coppie in seno a collettività vegetali. Ogni pianta considerata come (specie se fanerogama) individuo, può fecondare ed essere fecondata da tutte le altre di una certa collettività abbastanza ampia, a causa della multiplicità dei suoi fiori e del modo stesso della fecondazione.

Questi sono i due tipi estremi.

È chiaro che fra questi due tipi estremi vi sono tipi intermedi formanti tutta una gamma continua.

Così ad esempio, in una collettività animale abbastanza ristretta (e formata non da unioni matrimoniali stabili) durante il periodo di maturità sessuale si potranno di fatto verificare tutti i possibili accoppiamenti; mentre in una collettività botanica, che occupi una grande estensione territoriale, *non* si verificheranno invece tutti i possibili accoppiamenti, ma soltanto quelli fra elementi che sieno territorialmente contigui.

Ed occorre, con opportuni accorgimenti, tradurre in relazioni matematiche e statistiche questi fatti e queste possibilità.

Orbene, i due tipi estremi dànno origine a problemi matematici di natura essenzialmente diversa.

Se vi è il primo tipo — quello zoologico, per intenderci — il numero e le probabilità di accoppiamenti seguono una legge lineare: valgono allora, accettando uno schema deterministico (ammettendo cioè che le combinazioni si formino effettivamente) le conclusioni da noi date in alcune delle Note riguardanti la Statistica delle Collettività, pubblicate in questi Rendiconti.

L'evoluzione segue cioè una legge lineare: passando cioè da una generazione alla seguente con trasformazioni lineari.

Per l'altro tipo invece, quello botanico (come si è visto nella nostra ultima Nota) l'evoluzione segue una legge quadratica: d'altro canto la teoria dei gruppi sanguigni segue la stessa via.

Si passa da una generazione alla seguente per mezzo di una trasformazione quadratica.

3. Tutto questo naturalmente è valido se gli schemi adottati sono di natura deterministica e si esaminano i fenomeni per grandi cifre, sostituendo a rapporti di numeri interi cioè a variabili discrete, variabili continue.

Necessariamente, pur conservando lo stesso schema di formazione delle coppie, i risultati teorici possono (anzi *devono*, si può dire) essere in contrasto o per lo meno in disaccordo con i rilevamenti sperimentali: e ciò per tre cause diverse.

I Causa: L'accoppiamento avviene secondo uno schema probabilistico e non deterministico.

II Causa: Lo sviluppo della nuova generazione, all'istante delle

prime divisioni cromosomiche avviene anch'esso secondo schemi probabilistici.

III Causa: Lo sviluppo ulteriore degli individui della nuova generazione avviene anch'esso secondo schemi probabilistici.

Le tre cause agiscono — ovviamente — secondo le leggi dei grandi numeri: tanto più si devia dalle frequenze teoriche, nelle frequenze rilevate, quanto minore è il numero dei casi in esame.

4. Ma un'ulteriore conseguenza (il cui significato matematico sarà a suo tempo sviluppato) porta questo schema probabilistico.

Infatti, sia Θ la trasformazione che conduce — in senso deterministico — dalla collettività dei genitori a quella dei figli; sicchè in uno schema deterministico si avrebbero le successive generazioni:

$$K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , \ldots , K_r$$

con

$$K_1 = \Theta K_0 \; ; \; K_2 = \Theta K_1 = \Theta^2 K_0 \; ; \ldots ; \; K_r = \Theta^r K_0 .$$

Se invece si ha uno schema probabilistico di sviluppo e di evoluzione, sarà

$$K_0 , K_1^* , K_2^* , \ldots , K_r^* , \ldots$$

la successiva catena delle generazioni, con

$$K_1^* = \Theta (1 + \Omega_1) \cdot K_0 \; ; \; K_2^* = \Theta (1 + \Omega_2) K_1^* ;$$

essendo, simbolicamente Ω_1 il termine correttivo che dà la fluttuazione attorno al passaggio deterministico da K_0 a K_1 e così analogamente per gli stadi successivi.

Avverrà, in questo caso, quanto si verifica nella teoria degli errori e in alcune teorie della fisica moderna. Cioè lo stadio finale si trova in una certa posizione rispetto a quello iniziale: ma tale posizione finale *non* è determinata, bensì resta collegata ad una distribuzione di probabilità.

Quindi, due collettività originarie, analoghe in numero e composizione, dopo un certo numero di stadi evolutivi possono dar luogo a collettività finali diverse fra loro; più o meno diverse a seconda del numero degli stadi percorsi.

E se a questo fatto si aggiunge lo « sfioccamento » delle varie generazioni per cui in un certo istante possono coesistere elementi di generazioni

diverse si avrà un'idea di quel che può comportare la diversità fra lo schema deterministico e quello probabilistico di evoluzione.

Ed è questo il primo punto da porre in fondamentale rilievo in una organica teoria della evoluzione: esso si collega alla quistione VI ed alla IV.

Resta da concretare ancora il fatto che non tutti i tipi di passaggio da una generazione all'altra sono tipi estremi: cioè zoologico — a passaggio lineare —; botanico a passaggio quadratico.

Ed allora è necessario fissare anche qui quello che avviene e tradurlo, ove possibile, in schemi probabilistici.

5. Così ad esempio se vi sono delle collettività originarie contigue (territorialmente, in certi luoghi confinanti per fissare le idee), sieno esse

$$K'_0 , K''_0 , \ldots , K_0^{(m)}.$$

Orbene vi è una legge quadratica in ognuna di esse con sè slessa, ma vi deve essere altresì una ulteriore legge che secondo un certo schema di probabilità permette l'incrocio fra due di esse a cominciare da quelle contigue e seguendo via via quelle più lontane.

Dunque anche in tal caso si ha senz'altro un passaggio probabilistico, da sovrapporre al precedente, e che determina da un lato la comparsa — (dopo un certo numero di generazioni) in un certo luogo di forme che prima non vi esistevano e la scomparsa di altre — sia come genotipi sia come fenotipi.

Occorrerà distinguere se si tratta di specie sessili o di specie mobili.

Nel primo caso si avranno equazioni che devono essere analoghe a quelle di conduzione del calore, ma complicate dai termini dovuti alla legge genetica.

Nel secondo caso invece occorrerà introdurre — oltre questo schema — qualcosa che ricordi la turbolenza e la diffusione di essa: comunque in ambedue i casi si avranno leggi probabilistiche di diffusione da sovrapporre ad uno schema deterministico analogo a quello di conduzione o di propagazione del calore.

Ed anche in questo campo sarà compito dei matematici di fornire i mezzi di indagine, lo sviluppo deterministico e successivamente l'evoluzione probabilistica di queste collettività «*concatenate*» fra loro. Ed è questo che fanno la sostanza della questione V.

6. Caratterizzata questa prima serie di problemi ne sorge subito un'altra, allorchè si passa dal monoibridismo al poliibridismo.

E limitiamoci per il momento alla sua forma più semplice cioè a quello dovuto ad allelomorfi multipli.

Cominciamo dall'osservare che già nel monoibridismo mendeliano si presentano due tipi nettamente distinti. Cioè il tipo « Pisum », ed il tipo « Ialapa ». Per il primo si è in presenza di portatore di carattere A, dominante e di portatore del suo recessivo a; sicchè nella discendenza si hanno eterozigoti (Aa) ed omozigoti dominanti (AA) e recessivi (aa): in tutto tre genotipi, ma solo due fenotipi (AA) , (Aa) ed (aa). Invece l'altro tipo di incrocio si presenta con tre genotipi ma anche con tre fenotipi: fiori bianchi, rossi e rosa.

Vi sia ora in esame un poloibridismo, ad alleli multipli: e cominciamo da tre (a quattro, si presentano fatti nuovi); sieno essi A , a , α.

Orbene occorre dare delle indicazioni e stabilire un simbolismo per caratterizzare i rapporti che possono intercedere fra questi alleli; e, nel caso, caratterizzare delle leggi che consentano di affermare o negare la possibilità di tali rapporti.

7. Trattiamo dunque, in partenza, del caso di alleli multipli.

Siano A , a , α i tre alleli del carattere in esame. I genotipi derivanti da questi zigoti sono sei, di cui tre omozigoti: AA , aa , $\alpha\alpha$; e tre eterozigoti Aa, $A\alpha$, ed $a\alpha$.

Per caratterizzare i fenotipi che si presentano occorre distinguero tre casi fondamentali (veramente si possono ridurre a due se si considera un carattere aggiuntivo « grandezza del mosaico); e cioè a seconda che i caratteri sono miscibili dando luogo ad un carattere nuovo fenotipo, oppure sono miscibili a mosaico (e questo si può ritenere fuso col precedente introducendo il carattere « grandezza del mosaico), oppure sono dominante e recessivo.

Quindi si hanno:

I. Alleli miscibili

II. Alleli a dominante e recessivo.

Vi sono dunque 8 casi possibili in relazione al diverso comportamento degli eterozigoti: e per caratterizzarli usiamo il segno $\sim$ per indicare la miscibilità, il segno $\neq$ per indicare la presenza di dominante; indicando poi con $A > a$ ad esempio il caso di A dominante, a recessivo.

Siamo portati ad avere dunque la seguente tabella di casi

I. $A \sim a$, $A \sim \alpha$, $a \sim \alpha$.
II. $A \neq a$, $A \sim \alpha$, $a \sim \alpha$.
III. $A \neq a$, $A \neq \alpha$, $a \sim \alpha$.
IV. $A \neq a$, $A \neq \alpha$, $a \neq \alpha$.

8. Il primo di questi casi porta dunque tre genotipi omozigoti: AA,

aa , $\alpha\alpha$ che sono anche fenotipi; e tre genotipi eterozigoti che sono anche fenotipi —: in tutto sei genotipi e sei fenotipi.

Il secondo di questi casi, se per fissare le idee A risulta dominante, dà luogo ai soli tre geno-fenotipi omozigoti ed a due fenotipi nuovi eterozigoti che sono anche genotipi, oltre ad un fenotipo eterozigote che coincide con un fenotipo omozigote: cioè Aa che è lo stesso fenotipo di AA.

Il terzo di questi casi dà in tutto quattro fenotipi — che sono anche genotipi e cioè AA , aa , $\alpha\alpha$, $a\alpha$; inoltre vi sono i genotipi Aa , $A\alpha$ che vanno a far parte di uno dei genotipi diversi, e precisamente bisogna distinguere due sottocasi. Fermo restando $A > a$, può essere $A > \alpha$ oppure $\alpha > A$.

Nel primo sottocaso i genotipi eterozigoti non miscibili danno sempre il fenotipo AA; nel secondo caso invece danno una volta AA ed una volta $\alpha\alpha$.

Infine nell'ultimo caso i genotipi eterozigoti danno fenotipi analoghi a quelli omozigoti. Occorre però distinguere le stesse alternative; vi può essere soltanto $A > a$, $A > \alpha$, $a > \alpha$; oppure $A > a$; $A < \alpha$; $a > \alpha$; ed in tali casi si hanno che i genotipi Aa , $A\alpha$, $a\alpha$, corrispondono rispettivamente ai fenotipi A , A , a oppure A , α , a.

Se per semplicità indichiamo con $\overline{B}$, $\overline{b}$, $\overline{\beta}$ rispettivamente i genotipi eterozigoti $a\alpha$, $A\alpha$, Aa, e con $\overline{A}$, $\overline{a}$, $\overline{\alpha}$, i genotipi omozigoti AA , aa , $\alpha\alpha$, e con le lettere non soprasegnate gli eventuali corrispondenti fenotipi, dovremo anzitutto osservare che vi sono sempre i fenotipi A , a , α in quanto essi sono certamente rappresentanti dei genotipi omozigoti. Ed oltre di essi, tenute presenti le condizioni già dette, vi possono essere — a causa dei genotipi eterozigoti — eventuali altri fenotipi.

Ciò risulta dalla seguente tabella:

I. Comportamento caratteri $A \sim a \sim \alpha$.
Genotipi $\overline{B}$, $\overline{b}$, $\overline{\beta}$
Fenotipi B , b , β

II. Comportamento caratteri $A > a$, $A \sim \alpha$, $a \sim \alpha$
Fenotipi B , b , A

III. Comportamento caratteri $A > a$, $A > \alpha$, $a \sim \alpha$
Fenotipi B , A , A

IV. Comportamento caratteri $A > a$, $A < \alpha$, $a \sim \alpha$
Fenotipi B , α , A

V. Comportamento caratteri $A > a$, $A > \alpha$, $a > \alpha$
Fenotipi a , A , A

VI. Comportamento caratteri $A > a$, $A < \alpha$, $a > \alpha$
Fenotipi a , α , A.

Pertanto, con sei genotipi diversi si possono avere 6 fenotipi, o 5 o 4 (in due modi diversi) o 3 in due modi diversi.

Se in origine la collettività constava di due individui in numero di

$$\begin{array}{lll} m_{11}\ ,\ m_{12}\ ,\ m_{13} & \text{dei genotipi} & AA\ ,\ Aa\ ,\ A\alpha \\ ,\ m_{22}\ ,\ m_{23} & & aa\ ,\ a\alpha \\ ,\ m_{33} & & \alpha\alpha\ ,\ \Sigma m_{i,j} = 1 \end{array}$$

essendo le m frequenze, nella generazione successiva essa consterà di genotipi con le frequenze

$$m'_{11} = m^2_{11} + m_{11}\, m_{12} + m_{11}\, m_{13} + m_{13}\, m_{13} + m^2_{13}$$

e così via per gli altri con formole analoghe ma sempre quadratiche.

9. Si ha dunque una tipica trasformazione quadratica che (contrariamente a quanto indicato nell'ultima nota) conviene seguire sulle frequenze, cioè su tante variabili quanti sono i genotipi, vincolando le variabili, che sono frequenze, col vincolo di avere la loro somma eguale ad 1.

La conseguenza di queste osservazioni — che impostano il problema III — è che nell'assegnare e studiare un gruppo di caratteri multiplamente alleli, occorre fissare (e quindi « *rilevare* ») l'intreccio di questi alleli.

In sostanza occorre fissare per ogni volta lo schema dei genotipi eterozigoti secondo il loro raggruppamento in fenotipi, e seguire la disgiunzione in essi operata per incrocio.

Se pertanto si hanno gli alleli multipli $A_1, A_2, \ldots, A_n$, occorre dire se ogni coppia è tipo miscibile oppure a tipo dominante e quindi fissare il dominante.

È bene rilevare che se gli alleli dànno tutti coppie del tipo miscibile, si può presentare una catena di fenotipi che simulano l'eredità intermedia con tutta la sua gradualità; e ciò secondo lo schema (uno dei più semplici di questo caso) di fenotipi

$$\begin{array}{l} F_0 \equiv (A_0\, A_0) \\ F_1 \equiv (A_0\, A_1) \\ F_2 \equiv (A_0\, A_2)\ ,\ (A_1\, A_1) \\ F_3 \equiv (A_0\, A_3)\ ,\ (A_1\, A_2) \\ F_4 \equiv (A_0\, A_4)\ ,\ (A_1\, A_3)\ ,\ (A_2\, A_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

E questo si collega, ovviamente, sia alla quistione VI che alla III.

10. In quanto alle seconde questioni noi abbiamo già altrove accennato ai fattori selettivi. Vi sono cioè fattori cromosomici, fattori zigotici, fattori omogamici,

I primi sono collegati alla presenza di uno degli alleli: in altri termini l'allelo A presenta una probabilità p_1 di essere fecondo, quello a, una p_2, quello α una p_3 — sempre su cento casi —. Sicchè i genotopi presentano le rispettive probabilità prodotto $p_i\ p_j$ di essere fecondi e nella coniugazione di due fenotipi si ha un prodotto di quattro p.

I fattori zigotici invece si riferiscono già ai genotipi: il genotipo AA presenterà una probabilità a_{11} di essere fecondo; e l'incontro di due genotipi è caratterizzato dal prodotto di due di queste probabilità.

Infine i fattori omogamici danno la probabilità che la coppia sia feconda e quindi danno una tabella di probabilità a doppia entrata, distinta per genotipi.

È chiaro che essa *non* si può che *solo sperimentalmente* scindere nelle sue due componenti: e cioè una di effettiva fecondità della coppia, l'altra di attrazione matrimoniale che seleziona le coppie stesse. Se non si introducono sperimentalmente condizioni atte ad eliminare la seconda causa, essa si fonderà con la prima dando una tabella risultante finale unica.

Sull' equazione di Stiefel ed altre analoghe

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 maggio 1941 - XIX)

Sunto. — La relazione di Stiefel che esprime un coefficiente binomiale come somma di due altri di base minore, viene assunta come equazione alle differenze. Si delineano in questa Nota, le principali proprietà della soluzione di questa e di altre analoghe equazioni, inclusovi un certo gruppo di trasformazioni in se stesse.

1. La relazione cui soddisfano i coefficienti binomiali

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$$

pur non essendo caratteristica per essi, vi è strettamente collegata.

E così anche altre analoghe ed affini, di cui indicheremo qualcuna. Notiamo intanto che la relazione stessa, scritta:

$$a(m,n) = a(m-1,n) + a(m-1,n-1) \tag{1}$$

è ovviamente un'equazione lineare alle differenze parziali [1]) e quindi gode di tutte le proprietà che derivano dall'esser lineare.

È facile ricondurre alla (1) molte altre analoghe. Così ad esempio la:

$$\tau\, b(m,n) = \rho\, b(m-1,n) + \sigma\, b(m-1,n-1) \tag{2}$$

Poniamo — e lo giustificheremo fra breve —

$$b(m,n) = \rho^{m-n} \cdot \sigma^{n} \cdot \tau^{-m} \cdot c(m,n)$$

ottenendo:

$$\tau^{-m+1} \cdot \rho^{m-n} \cdot \sigma^{n} \cdot c(m,n) = \rho^{m-n}\sigma^{n}\tau^{-m+1} c(m-1,n) + \rho^{m-n}\sigma^{n}\tau^{-m+1} c(m-1,n-1)$$

Ed eliminando il fattore in ρ, σ, τ, si vede che la c soddisfa precisamente la (1), ed è quindi proprio la a.

---

[1]) Cfr. M. Miglio, « *Sopra un' equazione funzionale etc.* ». Giornale Matem. di Battaglini, Vol. LXIV, S. 3ª. Napoli, 1926.

In altri termini

$$b(m,n) = a(m,n) \cdot \rho^{m-n}\,\sigma^{n}\,\tau^{-m}$$

Inoltre vi è una speciale simmetria fra m ed n; ovvero lo scambio di m ed n, congiunte ad un opportuno loro cambiamento di segno fa passare dalla (2) ad un'altra analoga, nella quale si sono scambiate σ e τ mentre ρ cambia segno.

Infatti, la (2) può anche scriversi

$$\tau\, a(m,n) - \rho\, a(m-1,n) = \sigma\, a(m-1,n-1)\ ; \qquad (3)$$

se in questo si pone

$$m-1 = -n',\quad n-1 = -m'$$

risulta

$$m = -(n'-1)\ ;\ n = -(m'-1)\ ;$$

ed indicato $a(m-1,n-1) = a(-n',-m')$ con $\alpha(m',n')$, risulta ovviamente

$$\sigma\,\alpha(m',n') = -\rho\,\alpha(m'-1,n') + \tau\,\alpha(m'-1,n'-1).$$

Dunque la trasformazione indicata muta l'equazione (2) in altra dello stesso tipo, scambiando però σ con τ e ρ con $-\rho$: come si era detto.

2. Chiamiamo «*soluzioni elementari*» della (1) o della (2), quelle per cui

$$a(m,n) = f(m)\,g(n)$$

(analogamente per la b); risulta subito — per la (1):

$$\frac{f(m)}{f(m-1)} = \frac{g(n)+g(n-1)}{g(n)} = \lambda$$

come rapporto arbitrario costante ed indipendente sia da m che da n; e l'equazione in due variabili si spezza in due ad una sola variabile.

Si otterrà

$$f(m) = a\,\lambda^{m}\ ;\ g(m) = b\,(\lambda-1)^{-n}$$
$$a(m,n) = k\,\lambda^{m}\,(\lambda-1)^{-n} \qquad ,\ k = a\,b\,.$$

Ora, causa la linearità, una qualunque combinazione lineare di soluzione della (1) dà ancora soluzioni della (1); dunque si presentano anche tutte le soluzioni

$$a(m,n) = k \int_u^v \lambda^m (\lambda - 1)^{-n} \, d\varphi(\lambda)$$

u e v essendo arbitrari e l'integrale essendo uno di STIELTJES.

In particolare per $\varphi(\lambda) = \lambda$ si ritrovano integrali definiti ben noti e connessi con la funzione Γ ed i coefficienti binomiali.

D'altro canto se $\varphi(\lambda)$ è sviluppabile in serie di potenze — a prescindere da questioni di convergenza — si otterrà

$$a(m,n) = \sum c_r \int \lambda^{m+r} (\lambda - 1)^{-n} \, d\lambda \; ;$$

e quindi a base di questa soluzione, apparentemente più generale stanno sempre gli integrali

$$\int \lambda^{m+r} (\lambda - 1)^{-n} \, d\lambda$$

tutti dello stesso tipo e tutti riducibili l'uno dall'altro col mutamento di m in $m + r$.

Quindi, in definitiva, per le soluzioni elementari basta considerare solo la

$$k \lambda^m (\lambda - 1)^{-n}$$

od anche

$$k \int \lambda^m (\lambda - 1)^{-n} \, \alpha\lambda$$

che sostanzialmente sono i coefficienti binomiali. Queste soluzioni bastano a caratterizzare tutte le altre.

3. Per l'equazione (2) lo stesso procedimento conduce a porre

$$b(m,n) = f(m) \cdot g(n)$$

ottenendo

$$\tau \frac{f(m)}{f(m-1)} = \frac{\rho g(n) + \sigma g(n-1)}{g(n)} = \lambda$$

e quindi, con λ arbitrario,

$$f(m) = a\,\lambda^m\,\tau^{-m}$$
$$g(n) = b\left(\frac{\lambda-\rho}{\sigma}\right)^{-n}$$
$$b(m,n) = k\,\lambda^m\,(\lambda-\rho)^{-n}\,\tau^{-m}\,\sigma^n \qquad ,k = a,b\,.$$

Ed è facile — confrontando con la soluzione della (1) — che si ha proprio

$$\sigma_\lambda(m,n) = a_\lambda(m,n)\,\rho^{m-n}\,\sigma^n\,\tau^{-m}$$

come si era già detto.

In quanto alla trasformazione essa risulta anche immediata; infatti posto $m-1=n'$; $n-1=m'$; e scambiando poi σ con τ, ρ in $-\rho$ risulta

$$k\,\lambda^{-n'+1}\,(\lambda+\rho)^{-m'+1}\,(-\rho)^{m'-n'}\,\sigma^{-n-1}\,\tau^{-m'+1}$$

che si riproduce perfettamente in quella già data col mutamento di λ in $-\lambda$.

4. A fianco delle soluzioni «elementari» noi potremo considerare anche delle soluzioni «semplici». Quelle cioè per cui tutta una linea è zero, salvo un elemento che assume il valore 1.

Indichiamo per comodità con $e(m,n)$ quella soluzione per la quale $e(o,n) = o$ se $n \neq o$; $e(o,o) = 1$.

Si vede facilmente che se noi assegniamo una linea di valori di $a(m,n)$ — cioè fissiamo $m=\mu$ ed n lo lasciamo variabile, assegnando $a(\mu,n) = \alpha_\mu(n)$ in funzione di n, la soluzione che soddisfa a tali condizioni può pensarsi — a prescindere dalle quistioni di convergenza — come una serie:

$$a(m,n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\nu)\,e(m-\mu,n-\nu)$$

Alcune relazioni funzionali sono legate a queste equazioni. Così, consideriamo la serie in una indeterminata

$$\varphi_m(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{m,n}\,\zeta^n$$

(o la funzione che può essere collegata ad essa attraverso opportuna som-

mazione nel caso di divergenza), vediamo che la relazione (1) equivale a

$$\varphi_m(\zeta) = \varphi_{m-1}(\zeta) \cdot (1+\zeta)$$

mentre la (2) alla

$$\tau\,\varphi_m(\zeta) = \varphi_{m-1}(\zeta)(\rho+\sigma\zeta).$$

Ed analogamente — per la simmetria indicata — si potrà considerare la somma per colonne

$$\psi_n(\zeta) = \sum_{-}^{+\infty} a_{m,n}\,\zeta^m$$

con relazioni analoghe.

5. Alcune considerazioni del CESÀRO nelle sue memorie «*Sur diverses questions d'arithmétique*» si ricollegano proprio a questi quadri. Il CESÀRO chiede se esistano successioni che si riproducano per differenza: ossia tali che formando le differenze, queste salvo uno spostamento di un posto, riproducano la successione data.

Con lieve trasformazione (negativizzando gli indici delle differenze successive) questo problema si riconduce proprio al nostro. Quindi si tratta — generalizzando — di vedere se esistano successioni di cui le differenze non fanno altro che riprodurle, spostandole (ad esempio di 2 posti).

In altre parole, occorre riconoscere se vi sono soluzioni comuni alla (2) ed alla

$$a(m+1,n) = h \cdot a(m,n+r).$$

Prendendo in esame le soluzioni fondamentali si trova che deve essere:

$$k \cdot \lambda^{m+1}(\lambda-\rho)^{-n} \cdot \tau^{-m-1}\sigma^n = hk\lambda^m(\lambda-\rho)^{-n-r} \cdot \tau^{-m} \cdot \sigma^{n+r}$$

e quindi

$$\tau(\lambda-\rho)^r = h\tau\sigma^r$$

E si vede che la soluzione, fissati ρ, σ, τ e scelti h, r e λ vi è sempre.

In particolare, per la (1) si vede che $r=1$, $h=2$ danno $\lambda=2$; mentre $r=-1$, $h=-1$, dànno $\lambda=\frac{1}{2}$.

Infatti la progressione di ragione 2 si riproduce per differenza; quella di ragione $\frac{1}{2}$, si riproduce cambiata di segno; quella di ragione $-\frac{1}{2}$ si riproduce per somma e quindi secondo l'equazione (1); quella di ragione -2, si riproduce per somma, cambiata di segno ($\rho = \sigma = 1, \tau = -1$).

6. Di proprietà del tutto analoghe godono le equazioni ottenute generalizzando quelle di STIEFEL iterate. Così, ad esempio, da

$$\binom{m}{n} = \binom{m-2}{n} + 2\binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n-2}$$

si può passare all'equazione più generale

$$\tau\, a(m,n) = \pi\, a(m-2,n) + \rho\, a(m-2,n-1) + \sigma\, a(m-2,n-2).$$

Di questa, l'equazione delle soluzioni fondamentali è:

$$\tau\,\frac{f(m)}{f(m-2)} = \frac{\pi\, g(n) + \rho\, g(n-1) + \sigma\, g(n-2)}{g(n)} = \lambda$$

e quindi si hanno le soluzioni

$$\begin{cases} f(m) = a_1 \mu_1^m + a_2 \mu_2^m \;;\; \mu^2 = \dfrac{\lambda}{\tau} \\ g(n) = b_1 \nu_1^m + b_2 \nu_2^m \;;\; (\pi - \lambda)\nu^2 + \rho\,\nu + \sigma = 0 \end{cases}$$

dovendosi trattare a parte il caso che quest'equazione abbia una radice doppia; perchè in tal caso si hanno le soluzioni

$$g(n) = (b_1 + b_2 m)\,\nu^m$$

Ed è sin troppo evidente che trattazioni analoghe vanno fatte in tutti i molti casi analoghi di ordine più elevate. Così anche si riconducono a a tali procedimenti sistemi di equazioni del tipo

$$\begin{cases} \tau'\, a(2m,n) = \rho'\, a(2m-1,n) + \sigma'\, a(2m-1,n-1) \\ \tau''\, a(2m-1,n) = \rho''\, a(2m-2,n) + \sigma''\, a(2m-2,n-1) \end{cases}$$

o altri analoghi più generali.

ERNESTO PASCAL

Commemorazione letta dal socio ordinario **Mauro Picone**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Camerati !

Non è senza emozione che prendo la parola per commemorare Ernesto Pascal in questa gloriosa aula dell'Accademia delle Scienze di Napoli nella quale Egli, fin da giovinetto, lasciando i banchi della scuola, veniva ad ascoltare i Suoi Maestri bramoso di udirne le discussioni nella formazione di quella scienza prediletta della quale, nella scuola, essi gli mostravano il solo lato divenuto perfetto.

In questa insigne aula Ernesto Pascal pensò ed operò per circa 40 anni! Dal 1883 al 1890 in religioso ascolto dei Suoi Maestri, dal 1907, anno della Sua ascesa alla cattedra di Analisi superiore dell'Ateneo napoletano, al 1940, anno della Sua morte, ininterrottamente, sempre presente ad ogni seduta, recando l'altissimo contributo di tutta la sua personalità di scienziato e di maestro, indipendente, volitiva, fattiva, geniale, fervida, dedita alla più intransigente passione per la scienza.

Nello stesso istante in cui il nostro Presidente volle designarmi per tanta commemorazione, mi si presentò imponente allo spirito codesto prodigioso quarantennio e con trepidazione, per ciò, io accettai un incarico che pur altamente mi onorava e ben al di là dei miei meriti.

Parlare di Ernesto Pascal nell'Accademia delle Scienze di Napoli, parlarvi dell'uomo, del cittadino, del maestro, dello scienziato è indubbiamente compito di grande responsabilità, nel duplice aspetto e spirituale e scientifico. Si tratta invero di fissare pubblicamente, in quel Rendiconto a cui Egli diede la più gran parte della Sua inesausta attività, i contributi che la scienza gli deve e che non possono essere appieno valutati se non sono posti, con sicura cognizione e con meditata interpretazione, nel quadro delle alterne vicende di tutta la vita.

All'assolvimento del mio difficile compito ebbi a collaboratori, e porgo ad essi vivissime grazie, Mario Pascal che mi ha fornito, con amore di figlio, notizie particolareggiate della vita di suo Padre, e Renato Caccioppoli che mi ha aiutato, con amore di devoto discepolo, nell'analisi della produzione scientifica del suo maestro.

ERNESTO PASCAL

(1865 - 1940)

La vita di Ernesto Pascal.

Ernesto Pascal nacque in Napoli il 7 febbraio 1865 da Stefano e da Maria Gaetana Zapegna. Aveva appena 3 anni quando gli morì il padre, che proveniva da una famiglia francese di commercianti tarasconesi, alcuni membri della quale avevano seguito a Napoli i napoleonidi. La morte di Stefano lasciò in ristrettezze la sua famiglia da poco tempo formatasi e che, composta dalla moglie e da quattro figli, era venuta a trovarsi quasi completamente isolata, staccata com'era dal ceppo originario. Ebbe campo, in quel periodo buio di miseria e di difficoltà, di rifulgere la forza d'animo e l'energia, non solo della madre, ma anche della sorella maggiore Luisa e del fratello Luigi che, l'una sedicenne e l'altro di appena tredici anni, abbandonarono gli studi e le dilettevoli occupazioni per mettersi ad un lavoro finanziariamente produttivo. Da tale lavoro la famiglia traeva l'unico sostegno per vivere e per mantenere agli studi i fratelli minori Ernesto e Carlo. Così questi poterono, crescendo, essere accolti in uno di quegli studi privati che allora fiorivano in Napoli e che tanto contribuivano al progresso culturale delle provincie meridionali.

Nell'Ateneo «Cristoforo Colombo» del Cav. Spicacci, tanto Ernesto che Carlo compirono, con onore, i loro primi studi elementari e poi quelli medi, e nel 1881, cioè quando appena aveva sedici anni, Ernesto poteva scrivere nel suo quaderno, che aveva intitolato «Memoriale»: «ottengo il foglio provvisorio di iscrizione ai corsi della Facoltà di scienze fisiche e naturali della R. Università di Napoli».

Egli percorse gli studi medi con grande profitto riportando alla fine di ogni anno scolastico la medaglia al merito e le più brillanti votazioni negli esami di licenza liceale, sostenuti presso il R. Liceo «Vittorio Emanuele» di Napoli. In tale periodo Egli già pubblicava qualche Suo scritto. L'ateneo Cristoforo Colombo stampava le Sue composizioni nei fascicoli che l'ateneo stesso pubblicava per dar conto dei progressi dei suoi allievi, la «*Rivista nuova di Scienze Lettere ed Arti*» diretta da Carlo Del Balzo, il *Corriere del mattino* e l'*Occhialetto*, stamparono molti Suoi articoli. Fra questi citeremo quelli dal titolo: *Sull'analisi spettrale; Del calore solare e dei suoi effetti sulla superficie della terra; La luce elettrica; Dell'arco voltaico e delle sue efficienze termiche e luminose.* Vediamo dunque che la spiccata tendenza di Ernesto Pascal a pensare con la propria testa, si rilevava già notevolissima fin da giovinetto, anche prima degli studi universitari e vediamo anche che il giovinetto era di preferenza attratto dagli studi di fisica. Entrato però all'università partenopea, dove tenevano allora cattedra Giuseppe Battaglini, Nicola Trudi, Achille Sannia, Ettore Caporali, non poteva, il Pascal, non essere attratto dagli insegnamenti di questi sommi Maestri e fu così che, abbandonando gli

studi di fisica, conseguì nel 1887 la laurea in matematica pura col massimo dei punti e la lode.

Nello stesso anno Egli ottenne, sempre con massima votazione, il diploma di magistero e fu nominato, come allora si diceva, professore reggente nel R. Ginnasio di Salerno, ottenendo poi subito il trasferimento nel R. Ginnasio di Avellino. In Avellino Egli però non insegnò mai, perchè nel novembre del 1887 ottenne un assegno presso l'università di Pisa e trascorse in quella città tutto l'anno accademico 1887-88.

Ebbe qui inizio quella produzione scientifica così varia e copiosa che non doveva aver termine che con la Sua morte. Scolaro del Battaglini, e suo allievo prediletto, Egli seguì, nei primi anni, il Suo maestro che allora aveva fatto conoscere e diffuso in Italia i classici lavori di Gordan e di Clebsch e perciò la Sua prima produzione, appena dopo la laurea, è quasi esclusivamente dedicata alla teoria delle forme. Avendo ottenuto un assegno di perfezionamento all'estero, passò a Gottinga l'anno accademico 1888-89 ove divenne discepolo di Klein. Frutto dei due semestri trascorsi a Gottinga sono i numerosi lavori sulle funzioni abeliane, ch'Egli pubblicò in quel lasso di tempo. Tornato a Pisa nel 1889 vi ottenne la libera docenza in Algebra complementare, che poi fece trasferire presso l'università di Napoli.

In queste peregrinazioni universitarie del Pascal, che non sono frequenti nei giovani, si può vedere tutta la Sua eccezionale volontà di apprendere attingendo alle più varie fonti, seguendo i più diversi indirizzi, per nulla inceppato da preconcetti di scuola, desideroso solo di conoscere la scienza alla quale intendeva dedicare tutte le sue esuberanti energie.

Alla nativa Napoli Egli tornò nell'ottobre 1889 avendo ottenuto un terzo assegno di perfezionamento e la nomina di professore di matematica presso il collegio militare. Vi rimase fino al dicembre 1890 giacchè nel tempo stesso in cui trasferiva la libera docenza in algebra da Pisa a Napoli, e conseguiva ivi, altresì, la libera docenza in calcolo infinitesimale, fu nominato, per concorso, professore straordinario di calcolo infinitesimale all'università di Pavia.

S'inizia così il sedicennio pavese della prodigiosa attività del Pascal che culminò nel 1903 con la pubblicazione, in quel solo anno, di ben 21 lavori, la massima parte importanti. Questa attività scientifica fu nei primi anni manifestamente ridotta dalle necessità dell'insegnamento, diciamo ridotta, non annullata, ed infatti in quell'inizio assistiamo anche ad una Sua copiosa produzione rivolta alle configurazioni, ma escono di già, insieme, i Suoi primi trattati, frutto di un'indipendente opera di maestro e cioè: nel 1895 le «*Lezioni di Calcolo infinitesimale*» e i celebri «*Esercizi e note critiche di Calcolo infinitesimale*» e, nel 1896, la «*Teoria delle funzioni ellittiche*». Dal 1897 al 1900 vi è un'accentuata diminuzione nella produzione del Nostro, ma non si creda che Egli stesse inoperoso.

In quel triennio il professore, appena trentenne, immagina ed attua quella grandiosa opera, che ha onorato ed onora tuttora l'Italia, che è il «*Repertorio di matematiche superiori*». Evidentemente, è il ricercatore che, bramoso di apportare contributi nuovi alla scienza, sente anzitutto la necessità di avere sott'occhio un quadro d'insieme di tutto quanto era stato fatto e di divenire padrone dei vari metodi già sperimentati di ricerca. Questa concezione dei doveri del ricercatore dovrebbe imporsi come insegnamento e come monito a tutti quelli che si affacciano al campo della ricerca, e non è certo possibile immaginare un matematico che non abbia oggi tra le mani il «Repertorio di Pascal», sia pure nella sua ultima edizione tedesca, e che non si senta grato al Nostro, per aver concepito e compiuta un'opera così utile al proprio cammino nel campo della ricerca.

Nel 1907 Ernesto Pascal, in virtù dell'art. 69 della Legge Casati, fu chiamato alla cattedra di analisi superiore dell'ateneo napoletano, cattedra che conservò per incarico fino al 1935, anno del suo collocamento a riposo per raggiunti limiti d'età. Nel 1910 era stato trasferito, quale ordinario, alla cattedra di algebra complementare presso la stessa università.

Il periodo napoletano della vita universitaria e scientifica del Pascal è, prevalentemente, dominato dalla teoria delle forme differenziali e dagli studi per la realizzazione di intere classi di integrali per equazioni differenziali, studi ch'Egli ha proseguito fino alla morte.

Nel 1909 fu nominato segretario generale del comitato ordinatore del IV congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze in Napoli, e in tale carica Egli profuse tutta la sua indomita energia ed il Suo spirito organizzatore pervenendo a dare a quel congresso un'impronta originale che lo fa annoverare tra i più importanti tra quelli tenuti dalla benemerita Società. Notevolissimi sono i discorsi pronunciati dal Nostro, all'inaugurazione e alla chiusura di quel Congresso, pervasi da un amore sconfinato per l'elevazione culturale del Mezzogiorno, per la quale chiedeva con toccanti accenti alle autorità ed agli scienziati convenuti, provvedimenti e studi con nuove direttive e con più potenti mezzi finanziari.

Nel 1910 divenne direttore del Giornale di Matematica di Battaglini, che aveva pubblicato i Suoi primissimi lavori e che Egli seppe riportare al suo antico splendore. Tale direzione tenne fino alla morte ed è ben triste pensare che con questa si è spento anche quel glorioso giornale di matematica.

A Napoli Ernesto Pascal fu più volte preside della facoltà di matematica e poi, per il mutato ordinamento universitario, della facoltà di scienze fisiche matematiche e naturali. Egli esercitò tale carica con la Sua solita tenace operosità e con nuovissime concezioni sopra l'organizzazione dell'insegnamento della matematica. Creò un seminario matema-

tico, e per ciascuna cattedra di matematica, un annesso laboratorio con dotazione propria, a disposizione del titolare della cattedra.

Il seminario matematico ebbe vita rigogliosa specialmente nel primo quindicennio della sua fondazione. I laboratori si svilupparono pur essi rapidamente, rivelandosi sovente un efficace mezzo per la ricerca e per l'insegnamento.

Non mancarono critiche alla creazione dei laboratori, ritenendo molti, che un'unica ben organizzata biblioteca potesse bastare per tutte le cattedre di matematica, considerando che per la ricerca matematica non occorre, in fondo, che avere libri, carta, penna e calamaio.

Chi vi parla non fu mai tra questi critici; non vedo perchè un professore di matematica non possa disporre utilmente, per il suo insegnamento e per la ricerca sua e dei suoi discepoli, di un laboratorio attrezzato come meglio creda e fornito di quei libri e periodici che gli occorrono più frequentemente. Diversa cosa è aver sottomano tutto ciò che occorre e diversa cosa è andare a cercarselo in una grande biblioteca, per scoprire poi, bene spesso, che quello che occorre non c'è, oppure è a prestito presso persona che, per esempio, non si può disturbare.

Sì, c'era l'inconveniente che uno stesso libro potesse trovarsi a Napoli in più di un laboratorio, ma non mi pare, questo, inconveniente di tale gravità da bastare alla condanna dell'istituzione dei laboratori. Ai titolari delle cattedre, peraltro, il Pascal raccomandava che nell'abbonarsi ai periodici, guardassero bene, nei limiti della effettiva necessità, di non fare dei duplicati.

Bene inteso, perchè i laboratori avessero potuto rendere, bisognava che i professori avessero saputo adoperarli, dedicandovi tutta la giornata del loro lavoro, attorniati dai propri assistenti e discepoli. Bisognava che avessero imitato il Pascal che dedicava tutto il pomeriggio, fino a tarda ora della sera, al Suo laboratorio ed ai Suoi discepoli.

Del resto non mancarono, all'originale creazione del Pascal, frutti cospicui. Mi limiterò fra questi a citare la costruzione e la sperimentazione degli integrafi ideati dal Pascal, i pregevoli lavori grafici compiuti e nel laboratorio di Pascal e in quello di Roberto Marcolongo, la raccolta di modelli meccanici in quest'ultimo e, finalmente, mi sia consentito di ricordarlo, la fondazione dell'Istituto per le applicazioni del calcolo presso il laboratorio della cattedra di analisi infinitesimale.

E si può domandare: l'idea dell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo e l'iniziale esperimentò fatto delle sue possibilità, avrebbero potuto aver luogo se l'assertore di quella istituzione non avesse avuto a disposizione, con completa indipendenza, un laboratorio proprio?

Io ritengo di poter affermare che tra i meriti di Ernesto Pascal è da annoverarsi anche quello della creazione dei laboratori di matematica nell'università di Napoli.

Non mancarono, al Nostro, pubblici riconoscimenti del valore della Sua opera di scienziato, di maestro e di cittadino. Fu cavaliere dell'ordine dei SS. Maurizio e Lazzaro, cavaliere ufficiale e commendatore dell'Ordine della Corona d'Italia. Nel 1901 gli fu conferita la medaglia d'oro dalla Società italiana delle Scienze, detta dei XL, per i Suoi lavori sulla teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque; nel 1905 vinse il premio, messo a concorso dalla nostra Società Reale, con un contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica; nel 1911 il Suo integrafo per equazioni differenziali, ottenne il diploma d'onore all'esposizione internazionale di Torino; nel 1914 gli furono conferite due medaglie d'oro, di nuovo dalla Società dei XL e dall'Istituto d'incoraggiamento di Napoli, per i Suoi studi sugli integrafi.

Fu professore onorario dell'università di Pavia, socio effettivo del R. Istituto Lombardo, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, di questa R. Accademia delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società dei XL, socio straniero dell'Accademia Reale di Praga, membro della Società matematica di Berlino, membro del Consiglio direttivo del Circolo matematico di Palermo, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

Infine ricorderò che nel 1919 fu anche presidente di questa Accademia.

Gettiamo ora un discreto sguardo nella vita intima di Ernesto Pascal. Nel 1893 sposò Albertina Alberti di nobile famiglia piemontese, e nel 1894 ne ebbe il primo figlio Alberto e dopo due anni il secondo, Mario.

La vita del Nostro, governata da quella eletta Donna che fu la Sua consorte, fu allietata anche dai due figli che lo secondavano nelle aspirazioni che su di loro Egli concepiva. E quali erano queste aspirazioni?

Eccovele. Egli desiderava che entrambi i figli si dedicassero con lui al culto della matematica e, com'è noto, Egli ebbe la consolazione di vedere appagati codesti desideri, nei quali è ben visibile il completo disinteresse utilitario ed un'ulteriore nobilissima dedizione, di sè stesso e di quanto avesse di più caro, alla matematica.

Fu uomo leale, e franco fino, talvolta, alla rudezza, fu amministratore rigido della propria famiglia e della pubblica cosa. Un lato notevole del carattere di Pascal era dato dal Suo incondizionato attaccamento al risparmio. L'assistere, per lui, ad uno sperpero in qualsivoglia occasione e in qualsivoglia luogo gli arrecava un senso di acuto disappunto.

Ebbe il culto dell'arte, specialmente della pittura, e fu inoltre sempre abile artefice nella costruzione dei più svariati oggetti. È nota la Sua ben fornita e ben tenuta officina che soleva mostrare con grande compiacimento ai visitatori della Sua casa ospitale.

Ma mentre la vita del Nostro trascorreva tranquilla ed operosa, si

addensava il ciclone della guerra europea che si abbattè anche sulla Sua casa strappandogli i figli, per i loro doveri militari.

Si ha un'indubbia traccia della costernazione in cui la guerra Lo gettò nel repentino e forte abbassamento della Sua attività scientifica verificatosi proprio nel 1916, fino allora all'altezza dei giovani anni.

Il 28 gennaio del 1918, durante la battaglia di Monte Valbella, il figlio primogenito Alberto, dopo essersi prodigato oltre ogni limite nel suo servizio di osservatore di artiglieria da aereo, assalito da due Fokker, dopo aver tenuto valorosamente testa al nemico fino all' esaurimento delle munizioni, cadde in vite sulle posizioni austriache e si uccise!

È immaginabile il dolore che affranse il Nostro a tale notizia! Il figlio Alberto aveva già fatto concepire al Padre ed ai suoi maestri le più belle speranze per la sua ascesa scientifica nel campo delle matematiche, e si era più volte distinto per atti di valore nei precedenti combattimenti che gli avevano procurato un encomio solenne e due medaglie d'argento. Il Nostro risentì profondamente e per sempre la perdita del figlio, per la quale, se pur non si desolava con manifestazioni esteriori, ebbe sempre nell'animo il più cocente dolore con un inestinguibile rimpianto.

Le disgrazie sulla casa di Ernesto Pascal si abbatterono, di poi, con frequenza. Nel 1925 morì sua madre, ed appena un anno dopo, ad una settimana di distanza l'uno dall'altro, i fratelli Luigi e Carlo. Ognun sa la intensità degli affetti che legavano Ernesto e Carlo Pascal in una comunione di alti ideali per la scuola, per la cultura e per la Patria.

Con la morte avvenuta nel 1935 della sorella Luisa, con quella, avvenuta nel 1937, della diletta Consorte e col Suo collocamento a riposo, avvenuto nello stesso anno, che lo privava della cara consuetudine, per tanti anni proseguita, di riunire intorno a sè nel pomeriggio di ogni giorno, nel Suo laboratorio di analisi superiore, allievi, discepoli e colleghi, la giornata mortale di Ernesto Pascal può dirsi virtualmente e tristemente compiuta.

Ultimo vivido sprazzo della Sua vitalità, non facilmente soccombente, fu la presentazione nel dicembre 1939 alla Reale Accademia d'Italia, della Sua memoria dal titolo: «*Sull' integrazione meccanica delle equazioni differenziali, ed in particolare di quella lineare del 2° ordine ausiliaria dell' altra non lineare, che è fondamentale nella fisica atomica*».

Egli non potè rivederne completamente le bozze: nel tardo pomeriggio del 25 gennaio 1940 l'inesorabile malattia che lentamente gli aveva logorato il cuore, ebbe ragione della sua robusta fibra di lavoratore e lo finì!

Lo scrittore ed il trattatista.

Prima di passare all'analisi degli scritti matematici del Nostro, parmi

opportuno considerare anche l'abbondante Sua produzione come oratore, come scrittore e come trattatista.

Le orazioni di Pascal fatte in occasione di inaugurazioni di anni accademici e di commemorazioni di scienziati, sono numerose e rivelano tutte un grande cuore, una mente elevata e una fervida ammirazione per le creazioni dei Sommi. I sentimenti che gli tumultuavano nell'animo alla perdita di ogni scienziato di valore, lo inducevano quasi sempre a manifestazioni, bene spesso spontanee, del più grande interesse per chi aveva la fortuna di ascoltarlo.

Egli ha commemorato Enrico Betti, Felice Casorati, Giuseppe Battaglini, Francesco Brioschi, Eugenio Beltrami, Carlo Hermite, Ernesto Cesaro, Giuseppe Colombo, Roberto Bonola, Enrico Poincaré, Ulisse Dini, Annibale De Gasparis, Corrado Segre, Felice Klein.

Io credo che pochi possono vantare un così cospicuo numero di commemorazioni.

La commemorazione di Eugenio Beltrami contiene, a mio avviso, la più completa e profonda monografia sulla classica produzione di quel sommo matematico, ed io ritengo che la monografia stessa sarebbe degna di essere molto più conosciuta e diffusa. Essa ebbe anche una traduzione in polacco, pubblicata a Varsavia, ed una in tedesco pubblicata nei Math. Annalen.

Originalissimi sono, poi, i discorsi pronunziati dal Nostro in occasione delle inaugurazioni degli anni accademici. Si legge ancor oggi col più grande interesse il discorso che Egli aveva preparato, in una tale occasione, nel 1897, intitolato: «Costumi ed usanze nelle Università italiane».

Il professore, allora poco più che trentenne, vi agitava con intrepida foga questioni del più alto interesse per la scuola e per la Patria, rivelandosi strenuo assertore dell'ordine e dell'autorità delle superiori gerarchie, negando i benefici di un'autonomia, male intesa e peggio impiegata, delle facoltà universitarie, bollando con parole roventi quelle libertà goliardiche che in quell'epoca funestavano la vita delle università italiane.

Come trattatista, era costante nel Pascal il proposito di scrivere libri della massima snellezza e facimente accessibili a qualsiasi lettore proveniente da qualsivoglia scuola. Ciò lo indusse a dare ai Suoi libri forma di manuali ed addirittura di manuali tascabili. È certo che Egli riusciva a farsi leggere da molti. La nostra generazione di matematici è tutta cresciuta studiando i libri di Pascal. Chi non ha letto nei giovani anni i Suoi esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale? la Sua teoria delle funzioni ellittiche? i Suoi determinanti? il Suo calcolo delle variazioni e delle differenze finite?

Il Nostro ci ha dato più di dieci trattati e di molti di essi parecchie edizioni italiane ed estere. Tra questi va di nuovo ricordato il «Repertorio di matematiche superiori».

Altre manifestazioni interessanti del Nostro vanno ricercate nelle Sue relazioni finali sui corsi da Lui tenuti di analisi superiore e nelle Sue note bibliografiche pubblicate nel Giornale di Battaglini, nei molti anni in cui Egli lo dirigeva.

Ricordo bene come in quei tempi, noi giovani matematici aspettavamo con ansia l'uscita del Giornale di Battaglini per andarvi a leggere le vivaci recensioni che il Pascal scriveva dei lavori matematici, ed esse non sempre erano elogiative, spesso, anzi, coraggiosamente stroncatrici, senza alcun riguardo della posizione scientifica dell'autore, che qualche volta era anche molto elevata.

Il Matematico.

I lavori matematici di Ernesto Pascal possono distinguersi nei seguenti gruppi:

I) Teoria delle forme algebriche.
II) Funzioni abeliane, iperellittiche, ellittiche.
III) Ricerche sulle configurazioni.
IV) Teoria delle forme differenziali.
V) Gruppi continui di trasformazioni.
VI) Determinanti.
VII) Equazione di Riccati ed estensioni.
VIII) Funzioni di più variabili complesse.
IX) Calcolo funzionale.
X) Risoluzione grafica delle equazioni differenziali e integrali.

I) *Teoria delle forme algebriche.*

A tale teoria sono dedicati alcuni, fra i quali la dissertazione di laurea, dei primi lavori di Pascal; un altro gruppo di lavori è posteriore a questi di quasi un ventennio.

La tesi di laurea è dedicata alla ricerca del risultante di una n-ica e di una cubica binarie, secondo un procedimento applicato da Clebsch al calcolo del risultante di una n-ica e di una quadratica. Nei lavori seguenti è particolarmente studiato un teorema dimostrato da Gordan per le forme binarie, ed esteso da Study alle forme ternarie, in vista della sua estensione alle forme in un numero qualunque di variabili. Notevole è il risultato finale, che consiste nel fatto che una formazione simbolica invariantiva identicamente nulla, omogenea in ogni serie di variabili e di coefficienti delle relative forme e irriducibile, si può scomporre nella somma di espressioni contenenti ciascuna un fattore almeno, identicamente nullo, rientrante in uno fra cinque tipi fondamentali diversi.

Nei lavori del secondo gruppo, Pascal studiò le equazioni differenziali per i risultanti e i discriminanti delle forme binarie, nonchè quelle rela-

tive a certi covarianti, in estensione di ricerche di Brioschi e di Betti; le condizioni perchè due forme binarie abbiano più fattori lineari in comune e perchè una simile forma abbia fattori multipli, con applicazione in particolare alla sestica; infine il metodo di Clebsch per l'ampliamento del sistema completo delle formazioni invariantive per un sistema di forme binarie cui si aggiunga una quadratica, Queste ultime considerazioni furono applicate da Pascal specialmente all'ampliamento del sistema di una cubica e di una biquadratica, col notevole risultato di ridurre di ben 94 invarianti il sistema completo che si sarebbe ottenuto dalla diretta applicazione del metodo di Clebsch.

Pascal si servì poi dei risultati di queste ricerche per studiare, sfruttando un'idea di Brioschi, il sistema completo per la forma biquadratica ternaria; ed a questo studio nonchè a quello delle condizioni per le varie decomposizioni in fattori di tale forma, dedicò un'ampia memoria, che (come già si è detto) fu premiata da questa Accademia.

II) *Funzioni abeliane, iperellittiche, ellittiche.*

Le ricerche in tale argomento rimontano al primo periodo, di intensissima attività, della carriera scientifica di Pascal. Si iniziarono a Gottinga sotto l'impulso di Klein, e costituiscono un notevole contributo, specialmente alla teoria delle funzioni σ abeliane.

Per le funzioni σ abeliane dispari di genere 3, Pascal riuscì a determinare il secondo termine dello sviluppo, ed assegnò la formola ricorrente per la determinazione dei termini successivi, fondandosi sulle equazioni differenziali di Wiltheiss. Una analoga ricerca compì poi per le σ iperellittiche di genere 3, tanto pari che dispari. Passando poi allo studio delle σ abeliane pari, sempre di genere 3, potè anche per queste determinare il secondo termine dello sviluppo; e tornando su questa ricerca qualche anno più tardi, diede ai risultati forma definitiva, ottenendo l'espressione del termine cercato in un più semplice e naturale campo di razionalità.

Uno studio approfondito delle funzioni iperellittiche di genere 2, dette da Klein di *primo rango*, e delle corrispondenti funzioni intere Σ, permise a Pascal di determinare l'equazione della superficie di Kummer che si ottiene prendendo le quattro Σ pari come coordinate omogenee di un punto di questa, equazione detta *razionale*, nonchè l'equazione delle superficie di sesto ordine toccanti la superficie di Kummer, desunta dalla relazione fra le Σ pari e quella dispari.

In tutti questi lavori, contenenti calcoli assai difficili e complicati, si manifesta l'ingegnosità algoritmica di Pascal e si afferma la sua maestria nel calcolo simbolico della teoria delle forme.

Anche della teoria delle funzioni ellittiche ebbe ad occuparsi Pascal in alcuni lavori, studiando l'espressione delle σ ellittiche pari, quando la

forma fondamentale è la cubica piana generale, ed assegnando certe relazioni notevoli per le ϑ con argomento zero.

Degno di speciale menzione è il lavoro contenente il primo esempio di estensione alle superficie di RIEMANN dei teoremi di WEIERSTRASS e di MITTAG-LEFFLER.

Il caso considerato è quello ellittico, per il quale si assegna una generalizzazione, in termini di funzioni σ, della formola di WEIERSTRASS, e anche di un caso particolare dello sviluppo di MITTAG-LEFFLER, in termini dell'integrale di seconda specie ϑ.

III) *Ricerche sulle configurazioni.*

Seguirono immediatamente le precedenti e come queste furono ispirate dagli studi a Gottinga.

Si iniziarono con una memoria sulle caratteristiche dei generi 3 e 4 e sui loro gruppi di sostituzioni, nella quale venivano ripresi ed approfonditi gli studi sulle cosiddette caratteristiche di RIEMANN, già fatti da WEBER per il genere 3 e da NOETHER per il genere 4. Il metodo applicato era essenzialmente un metodo combinatorio, fondato su una rappresentazione grafica delle caratteristiche, fornita per il genere 3 dalla rappresentazione di HESSE delle 28 tangenti doppie ad una quartica piana, e per il genere 4 dalla considerazione di certi sistemi (di NOETHER) di dieci caratteristiche pari, considerazione che conduceva a rappresentare le caratteristiche dispari mediante i 120 piani congiungenti tre a tre dieci punti dello spazio.

Seguì una serie di ricerche sulle configurazioni che direttamente o indirettamente si ricollegavano alle caratteristiche dei generi 3 e 4: quella delle 28 tangenti doppie ad una quartica piana, quella, considerata per la prima volta, dei 120 piani tritangenti ad una sestica storta di genere 4, quella delle 27 rette di una superficie cubica, ecc. Particolarmente di quest'ultima si occupò PASCAL in due estesi lavori nei quali ritrovò molti dei risulti già noti, aggiungendone parecchi nuovi; la rappresentazione delle 27 rette, cui qui ricorreva, si riduceva in sostanza ad una traduzione grafica della notazione di SCHLAEFLI.

Su queste ricerche PASCAL tornò vari anni dopo, studiando le configurazioni dei piani tritangenti reali della sestica storta nei diversi casi classificati da KLEIN, ed ebbe ad osservare come dalla rappresentazione grafica da lui considerata ci si poteva giovare, distinguendone i punti base in reali ed immaginari, nello studio delle questioni di realità. Questa osservazione gli suggerì un metodo, peraltro di natura meramente formale, per riottenere le classificazioni, già fatte da altri autori, delle superficie di KUMMER dal punto di vista della realità dei loro punti e piani singolari, e delle superficie del 3° ordine, e del 4° ordine a conica doppia, dal punto

di vista della realità delle loro rette; metodo che applicò ancora (con risultati di necessità solo formali) alla classificazione delle superficie del 5° ordine a quintica doppia.

IV) *Teoria delle forme differenziali.*

Le ricerche in tale teoria costituiscono la parte più importante della produzione di Pascal. Iniziate nel 1900 con lo scopo di estendere, nella misura del possibile, alle equazioni a differenziali totali del 2° ordine la teoria delle equazioni pfaffiane, approfondite poi nello studio delle forme differenziali di ordine superiore, culminano nel 1909 in una completa teoria invariantiva delle forme differenziali di ordine e grado qualunque, esposta in una poderosa memoria oramai classica ove sono riconsiderati e completati i risultati di larga parte dei lavori precedenti.

Dei sistemi di equazioni a differenziali totali del 2° ordine, Pascal studiò dapprima, per forme speciali, le condizioni di *completa integrabilità*; elevandosi poi alla considerazione dei sistemi di forma generale, introdusse per questi i *sistemi aggiunti* a derivate parziali del 2° ordine, e riuscì a dare forma definitiva alle condizioni di completa integrabilità estendendo il classico risultato sulla completa integrabilità di un sistema pfaffiano ammettente le trasformazioni infinitesime del sistema aggiunto.

Una seconda questione importante che si presentava era quella della *riduzione* di un'equazione a differenziali totali del 2° ordine, cioè della sua trasformazione in un'altra contenente un minor numero di variabili o di altro tipo speciale. Per le equazioni del primo ordine i risultati fondamentali, su cui poggia la risoluzione del problema di Pfaff, sono quelli relativi alla riduzione di Pfaff-Grassmann ed alla cosidetta riduzione di Jacobi. Nell'estenderli alle equazioni del 2° ordine, Pascal si imbattè in certe matrici a caratteristica invariante, le cui generalizzazioni hanno un ufficio importante nelle sue ulteriori ricerche.

Queste miravano ad estendere i primi risultati conseguiti agli ordini superiori, e fin dal principio ponevano ardui problemi formali la cui risoluzione richiedeva tutta la genialità algoritmica di Pascal. Già nel caso del 2° ordine Egli aveva incontrato certe espressioni nelle derivate dei coefficienti che apparivano come estensioni dei simboli di Christoffel relativi ad una forma differenziale quadratica. Con ulteriore estensione di tali espressioni agli ordini superiori, cioè con la costruzione delle formazioni, o simboli fondamentali relativi a forme differenziali di ordine qualunque, cui Egli pervenne con relativa semplicità introducendo l'operazione che chiamò in seguito *del dedurre*, tutta la teoria era, come Egli ebbe ad esprimersi, messa sulla sua strada maestra.

Mediante i simboli fondamentali si costruivano i cosidetti simboli *principali*, che restituivano in particolare i simboli di Christoffel, e, nel caso semplicissimo delle forme pfaffiane, le note differenze di derivate dei

coefficienti. Nella nuova teoria venivano così ad inquadrarsi, sotto certi aspetti, quelle classiche delle forme del primo ordine lineari e quadratiche.

Foggiati così gli strumenti essenziali di ricerca, PASCAL studiò in una serie di note dell'Acc. dei Lincei gli invarianti e covarianti simultanei di una forma differenziale e di una espressione a derivate parziali, le trasformazioni infinitesime applicate ad una forma differenziale, e l'estensiane e risoluzione generale dei problemi di riduzione di PFAFF-GRASSMANN e JACOBI. Si rivelarono d'importanza fondamentale per quest' analisi certe matrici a caratteristica invariante, costruite coi simboli principali, estendenti quelle già considerate nel caso del 2° ordine.

Un' ulteriore, definitiva generalizzazione della teoria diede in seguito PASCAL con l'introduzione delle forme differenziali di ordine e *grado* qualunque, e lo studio dei loro simboli fondamentali. La trasformazione dei coefficienti e dei simboli lo condussero a scoprire la legge generale di trasformazione dei sistemi covarianti a più gruppi di indici, e a porre così le basi di un Calcolo assoluto generalizzato, sviluppato più tardi da VITALI e ripreso recentemente da Enea BORTOLOTTI.

Giungiamo così all' ampia memoria del 1909, dedicata ad una esposizione sistematica della teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque. Vi si trovano in particolare diffusamente trattati le espressioni differenziali δ mediante le quali si costruiscono le forme differenziali, i simboli fondamentali, i simboli principali per le forme lineari, le matrici formate con gli elementi di un sistema covariante e con i simboli principali, le trasformazioni infinitesime delle forme lineari, la riduzione di PFAFF-GRASSMANN per una forma lineare qualunque.

Fra gli altri risultati notevoli di PASCAL nel campo delle forme differenziali vanno ancora ricordati quelli sull'*equivalenza* di due forme del secondo ordine, con l'estensione del classico teorema sull'equivalenza di due forme quadratiche a curvature costanti eguali, e quelli relativi alla riduzione di una forma del secondo ordine a tipi speciali.

V) *Gruppi continui di trasformazioni.*

Le ricerche su questa materia furono intraprese all'occasione di un corso sui gruppi continui dettato a Pavia nel 1900-901, che diede altresì origine ad un breve trattato, uno dei più pregevoli del PASCAL, contenente una perspicua esposizione didattica della parte generale della teoria di LIE.

Vi sono studiate certe identità fra simboli di trasformazioni infinitesime, che si applicano poi all'interessante problema di determinare, date due trasformazioni infinitesime generanti due trasformazioni finite, una terza trasformazione infinitesima generante il prodotto di quelle trasformazioni finite. Il risultato ottenuto è notevole dal punto di vista formale:

tuttavia va rilevato che degli sviluppi infiniti che vi compaiono non è provata la convergenza, sicchè non può ritenersi appieno soddisfacente l'applicazione che ne è fatta alla dimostrazione del secondo teorema di LIE.

In questa analisi vengono introdotti certi notevoli numeri γ, assai semplicemente legati ai numeri Bernoulliani, e che si applicano ulteriormente a stabilire alcune relazioni fra le costanti di struttura di un gruppo, e a dare una nuova dimostrazione del terzo teorema di LIE.

VI) *Determinanti.*

Alla teoria dei determinanti, oltre al noto pregiatissimo trattato, PASCAL ha dedicato saltuariamente qualche breve lavoro contenente osservazioni che aveva occasione di fare nell'applicazione dei determinanti alle sue svariatissime ricerche.

Si trovano, in questi lavori, un'ingegnosa estensione della regola di LAPLACE per lo sviluppo di un determinante nell'indirizzo del NETTO; relazioni fra determinanti che differiscono fra loro per una permutazione degli elementi; una deduzione da un unico principio, derivante dal calcolo simbolico delle forme algebriche di specie m, delle relazioni fra i determinanti di una matrice, che consente di ritrovare i risultati su tale argomento, dovuti a VARLEN, NETTO, PICQUET, SYLVESTER, con notevoli estensioni e risultati nuovi; un'elegante osservazione di semplici legami fra le caratteristiche di una matrice che risulta da un'altra ripetendo questa in senso diagonale un certo numero di volte e ponendo zero tutti gli elementi situati nei posti che non sono occupati con detta operazione; una profonda e agile rielaborazione di una ricerca del MUIR sull'Hessiana di un determinante, mediante la quale l'autore ritrova i risultati del MUIR ed uno nuovo concernente la caratteristica dell'Hessiana; procedimenti di grande eleganza che forniscono importanti proprietà dei determinanti che l'autore chiama «ricorrenti» di frequente uso nell'analisi; una caratterizzazione, fondata sulla detta teoria di due nuove successioni di numeri che l'autore chiama pseudo-euleriani e pseudo-tangenziali, per i quali stabilisce proprietà affini a quelle note dei numeri Euleriani e Bernoulliani; una dimostrazione del notevole fatto che taluni determinanti, gobbi rispetto a matrici, sono la somma di due quadrati; finalmente criteri di dipendenza lineare fra più polinomi, con coefficienti polinomi di assegnato grado.

VII) *Equazioni di Riccati ed estensioni.*

Brevi ricerche ha dedicato il PASCAL alla integrazione di equazioni differenziali ordinarie del tipo di RICCATI e anche di tipo più generale. Ha scoperto una classe di equazioni di RICCATI, integrabili algebricamente, e dato un'elegante espressione del rapporto semplice fra tre integrali e del bi-

rapporto fra quattro di un'equazione differenziale ordinaria ottenuta eguagliando la derivata prima della funzione incognita ad un polinomio razionale intero di tale funzione, con coefficienti funzioni arbitrarie della variabile indipendente. Ne ha dedotto una curiosa formula esprimente il birapporto delle quattro radici (supposte distinte) di un'equazione algebrica di 4° grado a coefficienti funzioni di una variabile.

In una serie di note posteriori a queste, valendosi di un risultato di Eulero, il Pascal riesce ad assegnare un caso di integrabilità per quadrature dell'equazione di Riccati, nel quale rientrano, come casi particolari, quelli dati precedentemente da Malmstén, Brioschi e Siacci e riconosce che il caso sopradetto appartiene, a sua volta, ad un'estesa classe di equazioni di Riccati, delle quali si può ottenere l'integrale generale con una sola quadratura, appena ne sia conosciuto un integrale particolare.

In un lavoro, relativamente recente, il Pascal studia poi le equazioni differenziali del 1° ordine, ottenute eguagliando la derivata prima della funzione incognita ad una somma di prodotti di funzioni della sola variabile indipendente per funzioni della sola funzione incognita e si propone di determinare, fra siffatte equazioni, quelle per cui avviene che tre o quattro integrali particolari qualsivogliano, rendono sempre costante una unica funzione di essi, giungendo al risultato inaspettato che, se l'indicata somma ha un numero di termini non superiore a quattro, le sole equazioni godenti di quella proprietà sono le lineari o quelle di Riccati.

VIII) *Funzioni di più variabili complesse.*

Dal 1912 al 1917 il Pascal pubblicò quattro note nei Rendiconti di questa Accademia e nel giornale di Battaglini, dedicate all'estensione del teorema Cauchy-Morera alle funzioni di più variabili complesse.

In due note del 1912, come saggio dei metodi variazionali, che egli intende seguire nella ricerca, determina le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè l'integrale superficiale di una forma differenziale di più variabili di ordine e grado qualunque non dipenda dalla superficie, ma unicamente dall'orlo di essa e dagli elementi del primo, del secondo ecc. dell'$(n-1)^{mo}$ ordine lungo l'orlo della superficie stessa, supposto che il dominio base della superficie sia rettangolare e in due distinte accezioni della forma differenziale. Nella seconda ritrova come caso particolare le condizioni date da Poincaré per l'invariabilità dell'integrale superficiale, al variare della superficie, di una forma differenziale di secondo grado.

In due note poi del 1917 il Pascal, riprendendo detta seconda accezione associa ad una funzione di due variabili complesse una forma differenziale bi-lineare nelle due variabili medesime, per la quale l'invarianza dell'integrale superficiale, esteso ad una superficie variabile dell'S_4 complesso, di assegnati orlo e dominio base (arbitrario), è condizione neces-

saria e sufficiente per l'olomorfia della funzione. Il PASCAL perviene così, ad una parziale estensione del teorema CAUCHY-MORERA per le funzioni di due variabili complesse, suscettibile di immediato trasporto alle funzioni di quante si vogliano variabili complesse.

IX) *Calcolo funzionale.*

Nel 1914 uscivano, a breve distanza l'una dall'altra, quattro note del PASCAL, nei Rendiconti di questa Accademia, sui fondamenti della teoria delle funzioni di linea, nell'indirizzo che il VOLTERRA aveva instaurato nel 1887 e cioè da più di cinque lustri. I perfezionamenti di tale teoria dovuti a questi lavori del Nostro, sono profondi e dànno ad essa, a mio avviso, un assetto definitivo, sebbene in un indirizzo, rivelatosi fino ad oggi sterile, per l'analisi sia esistenziale che costruttiva delle soluzioni nei capitali problemi di minimo, concernenti le funzioni di linea.

X) *Risoluzione grafica delle equazioni differenziali ed integrali.*

Gli studi di PASCAL su tale importante argomento, iniziatisi nel 1908, durarono, sia pure con qualche saltuaria interruzione, sino alla Sua morte, ed ebbero perciò la durata di più di sei lustri. Egli, giustamente, annetteva grande importanza scientifica alle creazioni strumentali che gli procuravano i detti studi, importanza sia dal punto di vista puramente matematico, sia da quello delle applicazioni alle scienze sperimentali e alla tecnica.

Il problema matematico che Egli si poneva può così enunciarsi: Data una equazione differenziale o integrale, creare un fenomeno meccanico tale che, da un'opportuna registrazione di esso su di un foglio da disegno, si possa dedurre la soluzione di detta equazione.

Ognuno vede il grande interesse matematico di un tale problema, che Egli soleva chiamare della *rappresentazione cinematica dei problemi analitici*, e al quale, con mai diminuita tenacia, voleva che i matematici dedicassero un ben reputato e intensamente coltivato campo di ricerche. Egli scrisse:

« A me pare che questo campo sia ben degno d'essere coltivato e mie-
« tuto e che possa in molti casi irraggiare sui problemi dell'analisi una
« luce nuova, nello stesso modo col quale le rappresentazioni e le conce-
« zioni geometriche portano nuova luce su certe ricerche analitiche, al
« punto che ormai molte di queste non possono più intendersi senza di
« quelle ».

Scrisse queste parole nel 1913 nella memoria dal titolo: *I miei integrafi per equazioni differenziali*, pubblicata negli Atti della nostra Accademia e le ripetè alla fine del 1939, nella Sua ultima memoria pubblicata negli Atti della Reale Accademia d'Italia.

E qui sembrami mio preciso dovere riportare integralmente un brano della prefazione di quella memoria:

« Lo scopo apparente di questa Memoria è quello indicato dal titolo, « cioè lo studio di un'equazione ausiliaria a un'altra che è fondamentale « per la Fisica atomica. Ma lo scopo vero è quello di richiamare ancora « una volta l'attenzione degli studiosi su quanto ho detto di sopra, ripe- « tendo quel che scrissi già un quarto di secolo fa.

« E tanto più mi sembra ora utile far ciò, in quantochè questo mi « sembra il momento buono per un siffatto richiamo, ora che tanti stu- « diosi si sono rivolti ad avvicinare sempre più la scienza pura alla tec- « nica, e che proprio qui a Roma è sorto un Istituto per le Applicazioni « del Calcolo.

« Nel leggere i numerosi rapporti che sono stati stesi per i lavori ese- « guiti in questo Istituto vi si trovano una quantità di problemi che col- « limano con quei prospettati nei miei antichi lavori, p. es. il problema « stesso che è oggetto di questa Memoria; è vero che la soluzione data « dall'Istituto è soluzione di carattere numerico approssimato, mentre « quella che si ricaverebbe dai miei metodi è una soluzione grafica esatta « ottenuta con mezzi cinematici, ma non è detto che i due metodi non « possono aiutarsi a vicenda e a vicenda completarsi, tanto più che l'Isti- « tuto, fornito com'è di quei mezzi che io non ho mai avuti, e diretto « da...., potrebbe farsi costruire (se trovasse un meccanico di grande abi- « lità) degli apparecchi di dimensioni rilevanti e più perfezionati ben di- « versi da quelli che io potetti farmi costruire come prime prove ».

Ebbene, io dichiaro che, nelle ultime conversazioni che ebbi con Lui, delle quali serberò sempre inalterabile ricordo, accettai la consegna che Egli mi affidava. Gli integrafi di Pascal dovranno entrare a far parte degli strumenti dell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo, le Sue geniali concezioni costruttive dovranno essere riprese, approfondite, perfezionate, ampliate e se ne trarranno certo nuovi potenti mezzi d'indagine matematica e il consolidamento di un'altra conquista del genio italiano.

Pubblicazioni di Ernesto Pascal

1. *Relazioni fra le ellissi centrali d'inerzia delle aree ed i baricentri dei volumi generati da essi.* Rend. R. Acc. Napoli, 1886.
2. *Teoremi baricentrici.* Rend. R. Acc. Napoli, 1886.
3. *Sulla costruzione del poligono regolare di 257 lati.* Rend. R. Acc. Napoli, 1887.
4. *Costruzioni geometriche di tre poligoni regolari.* Giorn. di Battaglini, v. 25, 1887.
5. *Sopra una formula numerica.* Giorn. di Battaglini, v. 25, 1887.
6. *Sulla risultante di una ennica e di una cubica.* Giorn. di Battaglini, v. 25, 1887.
7. *Sopra un nuovo simbolo sulla teoria delle forme binarie a due serie di variabili.* Rend. R. Acc. Napoli, 1887.
8. *Sopra un metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo.* Rend. R. Acc. Napoli, 1887.
9. *Sopra una applicazione del metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo.* Rend. R. Acc. Napoli, 1888.
10. *Sopra certi covarianti simultanei del sistema di due quartiche e di due quintiche.* Ann. di Mat., v. 16, 1888.
11. *Sopra alcune forme invariantive del sistema di due biquadratiche.* Rend. R. Acc, Napoli, 1888.
12. *Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie.* Giorn. di Battaglini, v. 26, 1888.
13. *Aggiunte alla Nota: Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie.* Giorn. di Battaglini. v. 26, 1888.
14. *Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme ennarie.* Rend. R. Acc. Lincei, (4), v. 4, 1888.
15. *Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche.* Mem. R. Acc. Lincei, (4), v. 5, 1888.
16. *Sullo sviluppo delle funzioni sigma abeliane dispari di genere tre.* Ann. di Mat., v. 17, 1889.
17. *Zur Theorie der ungeraden Abelschen Sigma-Funktionen.* Göttinger Nachr., 1889.
18. *Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle funzioni abeliane dispari a tre argomenti.* Ann. di Mat., v. 17, 1889.
19. *Sulla teoria delle funzioni sigma iperellittiche pari e dispari di genere tre.* Ann. di Mat., v. 17, 1889.

20. *Sulla teoria delle funzioni sigma abeliane pari a tre argomenti.* Ann. di Mat., v. 18, 1890.
21. *Zur Theorie der geraden Sigma-Funktionen.* Göttinger Nachr., 1889.
22. *Sopra le funzioni iperellittiche di prima specie per* p *uguale a due.* Ann. di Mat., v. 18, 1890.
23. *L'equazione razionale della superficie di Kummer.* Ann. di Mat., v. 18, 1890.
24. *Sulle sestiche di contatto alla superficie di Kummer.* Ann. di Mat., v. 19, 1891.
25. *Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate nella R. Università di Pavia nell'anno 1890 91* (litografie).
26. *Necrologia del Sen. Enrico Betti.* Riv. di Mat., t. 2, 1892.
27. *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e 4 e loro gruppi di sostituzioni.* Memoria I. Ann. di Mat., v. 20, 1892.
28. *A proposito di un libro del prof. Gino Loria sulla scuola napoletana di matematica nella prima metà del secolo.* Riv. di Mat., t. 2, 1892.
29. *Sui poliedri circolari che si possono formare coi 45 piani tritangenti delle superficie di 3° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), t. 25, 1892.
30. *Configurazione delle 36 bisestuple gobbe formate colle 27 rette della superficie del 3° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), t. 25, 1892.
31. *Configurazione delle 216 quintuple gobbe di 2ª specie.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), t. 25, 1892.
32. *Altre ricerche sulle rette della superficie di 3° ordine* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), t. 26, 1893.
33. *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi.* Memoria II. Ann. di Mat., v. 20, 1892.
34. *Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine.* Nota I. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 1, 1892.
35. *Ricerche sugli aggruppamenti formati colle coniche coordinate alla quartica piana.* Nota II. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 1, 1892.
36. *Su di una estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5.° ordine a quintica doppia.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 2, 1893.
37. *Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana.* Nota III. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 2, 1893.
38. *Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 2, 1893.
39. *Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4.* Nota I. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 2, 1893.
40. *Sui piani tritangenti della sestica storta di genere 4.* Nota II. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 2, 1893.
41. *Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica.* Memoria III. Ann. di Mat., v. 21, 1893.

42. *Commemorazione di Felice Caporali.* Annuario della R. Università di Pavia, a. 1893-94.
43. *Paolo Ruffini e i primordi della teoria dei gruppi.* (Traduz. dal tedesco di H. Burkhardt). Ann. di Mat., v. 22, 1894.
44. *Relazione sul corso di matematiche superiori dettato nella R. Università di Pavia nell'anno 1892-93. (Fondamenti analitici e geometrici per la teoria degli integrali e delle funzioni abeliane).* Pallanza, 1893.
45. *Sugli insegnamenti di Matematiche superiori nelle Università italiane.* Riv. di Mat., v. 3, 1893.
46. *Cenno necrologico di Giuseppe Battaglini.* Riv. di Mat., v. 4, 1894.
47. *Lezioni di calcolo infinitesimale.* Vol. I - II. Hoepli, Milano, 1895.
48. *Un capitolo di calcolo differenziale (Sulla serie di Taylor-Maclaurin).* Riv. di Mat., v. 5, 1895.
49. *Sulle funzioni σ ellittiche pari.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 28, 1895.
50. *Sulle funzioni σ ellittiche pari.* Ann. di Mat., v. 23, 1895.
51. *Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna* (Traduz. dal tedesco di F. Klein). Ann. di Mat., v. 23, 1895.
52. *Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale.* Hoepli, Milano, 1895.
53. *Teoria delle funzioni ellittiche.* Hoepli, Milano, 1896.
54. *Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero.* Ann. di Mat., v. 23, 1895.
55. *Considerazioni e proposte per la cattedra di Mineralogia nella R. Università di Pavia* (in collaborazione con A. Bartoli e C. Somigliana). Pavia, 1895.
56. *I determinanti. Teoria ed applicazioni.* Hoepli, Milano, 1897.
57. *Su di un teorema di Nello relativo ai determinanti e su di un altro teorema ad esso affine.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 5, 1896.
58. *Sopra le relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 5, 1896.
59. *Funzioni olomorfe nel campo ellittico.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 5, 1896.
60. *Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere 3.* Ann. di Mat., v. 24, 1896.
61. *Introduzione alla teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche.* Lezioni dettate nella R. Università di Pavia, 1896 (litografie).
62. *Sopra le varie forme delle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare.* Ann. di Mat., v. 24, 1896.
63. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite.* Hoepli, Milano, 1897.
64. *Repertorio di Matematiche superiori. — I. Analisi; II. Geometria.* Hoepli, Milano, 1897-1900.
65. *Costumi ed usanze nelle Università italiane.* Hoepli, Milano, 1897.

66. *Traduzione in polacco del Calcolo differenziale ed integrale per cura di S. Dickstein.* Warszawa, 1897.
67. *Traduzione in polacco del Calcolo delle variazioni per cura di S. Dickstein.* Warszawa, 1897.
68. *Discorso pronunciato sulla bara di Francesco Brioschi.* Annuario R. Ist. Tecnico Superiore, Milano, 1897-98.
69. *Sommario delle lezioni di Analisi algebrica dettate nella R. Università di Pavia nell' anno 1897-98* (litografie a cura del dott. L. Restellini).
70. *Cinque lezioni sull' interpretazione geometrica della teoria invariantiva delle forme binarie* (litografie a cura degli studenti Tenca e Brusotti). Pavia, 1898.
71. *Pochi cenni su Francesco Brioschi.* Annuario della R. Università di Pavia, 1898-99.
72. *Variationsrechnung,* (deutsch von A. Schepp). Teubner, Leipzig, 1899.
73. *Sulla scoperta della risoluzione dell' equazione di 5° grado.* La Perseveranza, 17 dicembre 1898.
74. *Traduzione in polacco del Repertorio di Matematiche superiori per cura di S. Dickstein;* v. I - II. Warszawa, 1900-1901.
75. *Sur une théorie des systemés d'equations aux differentielles totales de second ordre.* Comptes Rendus, Paris, t. 130, 1900.
76. *Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 33, 1900.
77. *La teoria delle equazioni ai differenziali totali di 3° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 33, 1900.
78. *Die Determinanten* (deutsch von Dr. Leitzmann). Teubner, Leipzig, 1900.
79. *Repertorium der Höheren Mathematik* (deutsch von A. Schepp). I, II. Teubner, Leipzig, 1900-902.
80. *Eugenio Beltrami.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.
81. *Parole pronunziate in occasione della morte di C. Hermite.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.
82. *Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter ord.* Math. Ann., v. 54, 1901.
83. *Un semplice teorema relativo alle caratteristiche di certe matrici rettangolari composte mediante altre.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.
84. *Sopra certi sistemi di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di 2° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.
85. *Programma del corso di Analisi superiore sulla teoria dei gruppi di trasformazioni dettato nella R. Università di Pavia nell'anno 1900-01.* (litografie), Pavia, 1901.
86. *Sopra alcune identità fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.

87. *Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sulla dimostrazione del secondo teorema fondamentale di Lie sulla teoria dei gruppi.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.
88. *Un teorema della teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di 2° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 34, 1901.
89. *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di 2° ordine.* Ann. di Mat., (3), v. 7, 1901.
90. *Traduzione in polacco del discorso su E. Beltrami per cura di S. Dickstein.* Wiadomosci Matematyczne, t, 6, Warszawa, 1902.
91. *Programma del corso di Analisi superiore dettato nella R. Università di Pavia nell'anno 1900-901 (Teoria dei gruppi di trasformazioni).* Boll. di Bibliog. e storia delle sc. mat., 1902.
92. *Sopra i sistemi parzialmente integrabili di equazioni ai differenziali totali di 1° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
93. *Sopra i numeri Bernoulliani.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
94. *Del terzo teorema di Lie sull'esistenza di gruppi di data struttura.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
95. *Altre ricerche sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sul gruppo parametrico di un dato.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
96. *Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
97. *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di 2° ordine e su una estensione dei simboli di Christoffel.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 11, 1902.
98. *Programma del corso di Analisi superiore dettato nella R. Università di Pavia l'anno 1901-02 (Sulla teoria generale delle equazioni ai differenziali totali del 1° e 2° ordine).* Bollet. di Bibliog. e storia delle sc. mat., 1902.
99. *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2° ordine.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 11, 1902.
100. *Lezioni di Calcolo infinitesimale.* 2ª ediz., v. I - II, Hoepli, Milano, 1902 - 1903.
101. *I gruppi continui di trasformazioni. Parte generale della teoria.* Hoepli, Milano, 1903.
102. *Sulle matrici a caratteristiche invarianti nella teoria delle forme ai differenziali di 2° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
103. *Estensione di alcuni teoremi di Frobenius.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.
104. *A proposito di una recente ricerca del dr. Muir sull'Hessiano di un determinante.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 35, 1902.

105. *I problemi di riduzione di Pfaff e di Jacobi nel caso del second' ordine.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
106. *Presentazione in omaggio all' Istituto di un opuscolo su Paolo Ruffini.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 36, 1903.
107. *Traduzione in polacco del volume sulla teoria dei gruppi di trasformazioni per cura di S. Dickstein.* Warszawa, 1903.
108. *Su di una classe di equazioni di Riccati integrabili algebricamente.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 36, 1903.
109. *Eugenio Beltrami* (deutsch von A. Schepp und A. Horn). Math. Ann., t, 57, 1903.
110. *Altre ricerche sulle matrici a caratteristiche invarianti nella teoria delle forme ai differenziali del 2° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 36, 1903.
111. *Su di una equazione differenziale di forma più generale di quella di Riccati e sul rapporto anarmonico di quattro radici di una equazione algebrica a coefficienti variabili.* Rend. Circ. mat. Palermo, t. 17, 1903.
112. *Resumé de quelques uns de mes récents travaux sur la théorie des groupes de Lie.* Prace Matematyczno Fyziczno, t. 19, Warszawa, 1903.
113. *Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Nota I, Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
114. *Sull' integrazione di un' equazione di Riccati più generale di quelle considerate da Malmsten, Brioschi e Siacci.* Rend. R. Acc. Napoli, 1903.
115. *Sulla costruzione dei simboli a carattere invariantivo nella teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Nota II. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
116. *Una classe di covarianti simultanei di una forma differenziale di ordine qualunque e di una alle derivate parziali.* Nota III. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
117. *Le trasformazioni infinitesime applicate ad una forma differenziale di ordine* r. Nota IV. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
118. *Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una forma o un' equazione ai differenziali totali.* Nota V. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
119. *La estensione dei problemi di riduzione di Pfaff, Grassmann e Jacobi.* Nota VI. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
120. *Sulle forme differenziali omogenee di ordine superiore.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 36, 1903.
121. *Il secondo dei problemi di riduzione per le forme differenziali di ordine pari.* Nota VII. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
122. *Il secondo dei problemi di riduzione per le forme differenziali di ordine dispari e ricerche complementari.* Nota VIII. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.

123. *I problemi di riduzione per le forme differenziali risoluti in modo diretto.* Nota IX. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 12, 1903.
124. *Relazione sul concorso al premio ordinario del Reale Istituto Lombardo per la Matematica.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 37, 1904.
125. *Un théoreme pour les systèmes completement intégrables d'équations aux differentielles totales d'ordre superieur.* Comptes Rendu. Paris, 1904.
126. *Le forme differenziali ad una sola variabile e a coefficienti costanti in relazione colla formola per il differenziale r-esimo dell'esponenziale.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 37, 1904.
127. *Sul teorema di Bäcklund sul piano.* Rend. Circ. mat. Palermo, t. 18, 1904.
128. *Sulle equazioni differenziali per i risultanti e discriminanti di forme binarie.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 13, 1904.
129. *Sulle condizioni invariantive perchè due binarie abbiano più fattori lineari comuni.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 37, 1904.
130. *Sopra le equazioni differenziali relative a certi covarianti di forme algebriche. Estensione di alcune ricerche di Brioschi e Betti.* Rend. R. Acc. Lincei, (5). v. 13, 1994.
131. *Teoremi sulle forme binarie a fattori multipli e applicazione alle forme del 5° ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 37, 1904.
132. *Sul sistema di Guldenfinger relativo ad una biquadratica e una cubica binarie.* Nota I. Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 37, 1904.
133. *Sul sistema di certe formole di Betti estese.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 13, 1904.
134. *Sulle condizioni invariantive perchè una binaria biquadratica abbia per fattore una cubica.* Nota II. Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 38, 1905.
135. *Aggiunte ad alcuni teoremi di Clebsch relativi alla costruzione di sistemi completi di forme invariantive.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 38, 1905.
136. *Sotto i portici dell'Università di Pavia.* Numero unico «Ars et vita» pubblicato in occasione del Congresso universitario. Pavia, 1905.
137. *Le varie forme delle curve storte di 6° ordine intersezioni complete di quadriche e cubiche* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 38, 1905.
138. *Sulla classificazione delle superficie di Kummer.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 38, 1905.
139. *Parole pronunziate per la chiusura del Convegno indetto a Milano dall'Associazione Mathesis fra i professori di Matematica dell'Alta Italia.* Boll. Ass. Mathesis, a. 9, 1905.
140. *Ricerche sulla sestica binaria.* Mem. R. Acc. Lincei, (5), v. 5, 1908.
141. *La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 14, 1905.

142. *Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori.* Atti R. Acc. Napoli, (2), v. 12, 1905.
143. *Programmi dei corsi di Analisi superiore dettati nella R. Università di Pavia negli anni 1903-904 e 1904-905.* Boll. di Bibliog. e storia delle sc. mat., 1905.
144. *Sul reciproco del teorema fondamentale relativo alle derivazioni covarianti.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 39, 1906.
145. *Sulla equivalenza di due sistemi di forme differenziali multilineari e su quella di due forme differenziali complete di 2° ordine.* Rend. Circ. mat. Palermo, t. 22. 1906.
146. *Sui simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 15, 1906.
147. *Sopra una proprietà dei determinanti wronskiani.* Atti R. Acc. Torino, t. 41, 1906.
148. *Sulle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante.* Atti R. Ist. Veneto, (8), t. 8, 1905-906.
149. *Sui covarianti angolari di una forma differenziale di ordine superiore.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 15, 1906.
150. *Sui determinanti composti e su di un covariante estensione dell'Hessiano di una forma algebrica.* Rend. Circ. mat. Palermo, t. 22, 1906.
151. *Su di una generalizzazione delle forme differenziali e dei sistemi covarianti nel calcolo differenziale assoluto.* Rend. Circ. mat. Palermo, t. 23. 1907.
152. *Commemorazione di Ernesto Cesàro.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 39, 1906.
153. *Parole pronunziate in occasione delle onoranze per il 50° anno di insegnamento del Sen. Giuseppe Colombo.* Volume delle onoranze Milano, 1907.
154. *Necrologia di Ernesto Cesàro.* Boll. Ass. naz. fra i prof. univers., a. 2, 1907.
155. *I determinanti ricorrenti e le loro proprietà.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 40, 1907.
156. *Parole pronunciate a proposito della Nota del dr. Burgatti nella seduta del 21 febbraio 1907.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 40, 1907.
157. *Il concetto della scienza e il nuovo disegno di legge sui trasferimenti dei professori universitari.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 40, 1907.
158. *I determinanti ricorrenti ed i nuovi numeri pseudo-euleriani.* Rend. R. Ist. Lombardo, (2), v. 40, 1907.
159. *I nuovi numeri pseudo-tangenziali.* Rend. Circolo matem. Palermo, t. 23, 1907.
160. *Sulla legge per gli esami nelle scuole medie.* La Vita, 12 maggio 1907; Nuovi doveri, Palermo, a. I, 1907.

161. *Una formola sui coefficienti polinomiali e su di un determinante ricorrente.* Period. di mat., a. 22, 1907.
162. *Su certe classi di equazioni di Riccati integrabili con una sola quadratura quando ne sia conosciuto un solo integrale particolare.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 17, 1908.
163. *Osservazioni ed aggiunte alla mia Nota sull' equazione di Riccati di tipo più generale di quelle considerate da Malmstén, Brioschi e Siacci.* Rend. R. Acc. Napoli, 1908.
164. *Parole pronunziate per l'inaugurazione del monumento ad Alfonso Sella nell' Istituto fisico della Università di Roma.* Volume delle onoranze, Roma, 1908.
165. *Esercizi critici di Calcolo differenziale ed integrale.* 2ª ediz., Hoepli, Milano, 1909.
166. *Programma del corso di Analisi superiore tenuto nella R. Università di Pavia nell'anno 1906-07 (Sulla teoria delle funzioni ellittiche, della loro trasformazione, ed applicazione alla risoluzione dell' equazione di 5° grado).* Boll. di Bibliog. e Storia delle scienze mat. a. 10, 1908.
167. *Sur la nouvelle théorie des formes differentielles d' ordre et de degré quelconques.* Prace matematyczno-fizyczno, Warszawa, t. 19, 1908.
168. *La nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.* Atti IV Congresso intern. dei matem., Roma, 1909.
169. *Traduzione in polacco degli Esercizi critici di Calcolo differenziale e integrale per cura di S. Dickstein.* Warszawa, 1909.
170. *Lezioni di Calcolo infinitesimale.* 3ª ediz. riveduta, v. I. II. Hoepli, Milano, 1910-1911.
171. *Relazione alla Facoltà matematica di Napoli circa l'adattamento degli antichi locali degli Uffici a nuova sede della Facoltà stessa.* Napoli, 1909.
172. *Osservazioni su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 18, 1909.
173. *L' integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1° ordine e per altre equazioni differenziali.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 18, 1909; Giornale di Battaglini, (3), t. 48, 1910.
174. *Prefazione alla III serie del Giornale di Matematiche di Battaglini.* Giornale di Battaglini, (3), t. 18, 1910; Boll. di Mat., t. 9, 1910.
175. *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.* Mem. R. Acc. Lincei, (5), v. 8, 1910.
176. *Repertorium der höheren Mathematik. I: 1, 2, 3; II: 1, 2*; 2ter Auflage, Teubner. Leipzig u. Berlin, 1910-1929.
177. *Piccole note bibliografiche.* I. Giorn. di Battaglini. (3), t. 48, 1910.
178. *Prefazione ai sommari dei corsi monografici di Matematica superiore tenuti nell' anno 1909-10 nelle Università italiane.* Giorn. di Battaglini, (3), t. 48, 1910.

179. *Piccole Note bibliografiche.* II. Giorn. di Battaglini, (3), t. 48, 1910.
180. *Piccole Note bibliografiche.* III. Giorn. di Battaglini, (3), t. 48, 1910.
181. *Discorsi pronunziati nelle sedute di inaugurazione e di chiusura del IV Congresso delle scienze in Napoli.* Atti del IV Cong. della Soc. it. per il progr. delle scienze, Roma, 1911.
182. *Piccole note bibliografiche.* IV. Giorn. di Battaglini, (3), t. 49, 1911.
183. *L' uso e le applicazioni dell' integratore meccanico per le equazioni differenziali.* Giorn. di Battaglini, (3), t. 49, 1911.
184. *Cenno necrolog. di Roberto Bonola.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 49, 1911.
185. *Su di una semplice ma notevole variante nella costruzione dell' integrafo di Abdank-Abakanowicz.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 17, 1911.
186. *Sopra alcune classi di integrafi per equazioni differenziali.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 17, 1911.
187. *Piccole note bibliografiche.* V. Giorn. di Battaglini, (3), v. 49, 1911.
188. *Di un nuovo integrafo per quadrature ed equazioni differenziali (integrafo polare).* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 17, 1911.
189. *Piccole note bibliografiche.* VI. Giorn. di Battaglini, (3), v. 49, 1911.
190. *Sul mio integrafo a riga curvilinea.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 18, 1912.
191. *Piccole note bibliografiche.* VII. Giorn. di Battaglini, (3), v. 50, 1912.
192. *Lezioni di Algebra complementare* (litografie). Napoli, 1912.
193. *Sulla estensione del principio donde derivano il teorema di Cauchy ed il teorema inverso di Morera nella teoria delle funzioni di variabili complesse.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 18, 1912.
194. *Sugli integrali doppi delle funzioni di variabile complessa.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 18, 1912.
195. *Piccole note bibliografiche.* VIII. Giorn. di Battaglini, (3), v. 50, 1912.
196. *Il mio integrafo polare e le sue applicazioni.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 50, 1912.
197. *Enrico Poincaré.* Rend. R. Acc Napoli, (3), v. 18, 1912; Giorn. di Battaglini, (3), v. 50, 1912.
198. *La crisi nelle Università italiane.* Ann. R. Università Napoli, 1912-13; Il Cimento, giornale di vita universitaria e professionale. Napoli, a. I, 1913; Nuovi doveri, Palermo, (2), v. 7, 1913; R. Sandron, Palermo, 1913.
199. *Piccole note bibliografiche.* IX. Giorn. di Battaglini, (3), v. 50, 1912.
200. *Il planimetro a scure di Prytz trasformato in integrafo per una notevole equazione differenziale.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 19, 1913.
201. *Lezioni di Algebra complementare.* 2ª ediz. (litografie) Alvano, Napoli, 1913.
202. *Sopra una classe di equazioni differenziali di grado* n *e di ordine* n — 1 *da considerarsi come estensioni delle equazioni di Riccati.* Ann. di Mat. (3), t. 20, 1913.
203. *Piccole note bibliografiche.* X. Giorn. di Battaglini, (2), v. 51, 1213.
204. *Integrafo per l' equazione differenziale dell' odografo relativo al movi-*

mento di un proiettile in un mezzo comunque resistente. Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 22, 1913.

205. *L' integrafo per la risoluzione grafica delle equazioni integrali.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 19, 1913.
206. *I miei integrafi per equazioni differenziali.* Atti R. Acc. Napoli, (2), v. 15, 1913; Pellerano, Napoli, 1914.
207. *Piccole note bibliografiche XI.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 51, 1913.
208. *Piccole note bibliografiche XII.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 51, 1913.
209. *I miei integrafi per equazioni differenziali.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 51, 1913.
210. *Introduzione al Calcolo infinitesimale* (litografie). Alvano, Napoli, 1914.
211. *Piccole note bibliografiche XIII.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 52, 1914.
212. *Sui principi della teoria delle funzioni di linea. Note I-II.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 20, 1914.
213. *Gli integrali Riemanniani delle funzioni di linea. III.* Rend R. Acc. Napoli, (3), v. 20, 1914.
214. *Le formole di Green e di Stokes per le funzioni di linea. IV.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 20, 1914.
215. *Piccole note bibliografiche XIV.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 52, 1914.
216. *Su di una classe di determinanti.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 20, 1914.
217. *Traduzione in inglese del precedente lavoro.* Math. Montly, v. 22, 1915.
218. *Determinanti a scala.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 20, 1914.
219. *Sui determinanti gobbi a matrici.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 21, 1915.
220. *Determinantes pseudosimetricos cuyos elementos son matrices.* Rev. Soc. Mat. Ispañola, a. 4, 1915.
221. *Piccole note bibliografiche XV.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 52, 1914.
222. *Piccole note bibliografiche XVI.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 53, 1915.
223. *Piccole note bibliografiche XVII.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 53, 1915,
224. *Le linee funzioni di linea.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 53, 1915.
225. *Piccole note bibliografiche XVIII.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 53, 1915.
226. *La risoluzione meccanica esatta delle equazioni differenziali lineari generali di 2.° ordine.* Rend. R. Acc. Lincei, (5), v. 25, 1916; Giorn. di Battaglini, (3), v. 54, 1916.
227. *Piccole note bibliografiche XIX.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 54, 1916.
228. *Piccole note bibliografiche XX.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 54, 1916.
229. *Piccole note bibliografiche XXI.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 54, 1916.
230. *Su di un derivatore polare da servire nella radiotelegrafia.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 23, 1917; Giorn. di Battaglini, (3), v. 55, 1917.
231. *Lezioni di Algebra complementare.* 3.ª ediz. (litografie) Alvano, Napoli, 1917.
232. *L' integrazione doppia nel campo complesso.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 23, 1917; Giorn. di Battaglini, (3), v. 55, 1917.

233. *Il teorema di Cauchy-Morera esteso agli integrali doppi delle funzioni di variabili complesse.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 23, 1917.
234. *Piccole note bibliografiche XXII.* Giorn. di Battaglini, (3), v. 55, 1917.
235. *Lezioni di Algebra complementare.* 4.ª ediz. Alvano, Napoli, 1918.
236. *Lezioni di Calcolo infinitesimale.* 4ª ed., v. I-II. Hoepli, Milano, 1918-1919.
237. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite.* 2.ª ed. Hoepli, Milano, 1918.
238. *Il senatore Ulisse Dini.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 24, 1918; Giorn. di Battaglini, (3), v. 56. 1918.
239. *Un teorema sui determinanti di ordine pari,* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 25, 1919.
240. *Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale.* 3.ª ediz. Hoepli, Milano, 1921.
241. *Parole pronunziate nella Accademia Pontaniana su Annibale De Gasparis.* Atti Acc. Pontaniana, v. 52, 1922.
242. *Lezioni di Algebra complementare.* 5.ª ed. Tip. Cimmaruta, Napoli, 1923.
243. *Meine Integraphen für Differentialgleichungen.* (deutsch von A. Galle). Zeitschr. für Instrumenten-kunde, v. 42, 1922.
244. *I determinanti.* 2.ª ediz. Hoepli, Milano, 1923.
245. *Le funzioni ellittiche.* 2.ª ediz. ampliata. Hoepli, Milano, 1924.
246. *Lezioni di Calcolo infinitesimale.* 5.ª ed., v. I-II. Hoepli, Milano, 1924.
247. *Sulle equazioni di Riccati.* Atti R. Acc. Napoli, (2), v. 17, 1924.
248. *Cenno commemorativo su Corrado Segre.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 30, 1924; Giorn. di Battaglini, (3), v. 63, 1925.
249. *Piccole note bibliografiche XXV.* Giorn. di Battaglini, (3) v. 62, 1924.
250. *Commemorazione di Felix Klein.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 31, 1925; Giorn. di Battaglini, (3), v. 63, 1925.
251. *Introduzione al Calcolo infinitesimale.* Tip. Trani, Napoli, 1925.
252. *Discorso tenuto nel R. Istituto Lombardo per presentare i libri donati e i premi istituiti da Carlo Pascal.* Rend. Ist. Lomb., (2), v. 59, 1926.
253. *Parole pronunziate dinnanzi al feretro di Gabriele Torelli.* Opuscolo pubblicato nel trigesimo della morte, Spoleto, 1931.
254. *Una breve osservazione sul metodo per la ricerca del limite superiore delle radici reali di una equazione.* Rend. R. Acc. Napoli, (3), v. 38, 1932.
255. *Introduzione al Calcolo infinitesimale.* 2.ª ed. Tip. Nappi, Napoli, 1933.
256. *Sull' integrazione meccanica delle equazioni differenziali ed in particolare di quella lineare di 2.° ordine ausiliaria dell' altra non lineare che è fondamentale per la fisica atomica.* Atti R. Acc. d'Italia, v. 11, 1940.

Studi energetici sui fenomeni di elettrolisi

Nota del prof. **Ugo Beretta,** *presentata dal socio ordinario* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 4 aprile 1942 - XX)

Sunto. — L'A. si è proposto lo scopo di controllare la ripartizione della energia durante il processo di elettrolisi ed ha eseguito alcune misure adoperando elettrodi di Pt, Au e Ni in soluzione di H_2SO_4, di KOH e di K_2SO_4, avvalendosi di un elettrolizzatore disposto in modo da funzionare come calorimetro.

La differenza tra l'energia somministrata al sistema e quella ritrovata sotto forma di calore rappresenta l'energia chimica del processo: l'A. trova che questa ultima grandezza ammonta costantemente a 285,6 kj.

Contemporaneamente, avvalendosi di uno speciale dispositivo di misura si è potuta valutare la caduta istantanea della tensione all'interrompersi della corrente. Si possono quindi avere i valori della polarizzazione di saturazione π nei vari casi e svolgere interessanti considerazioni sul fenomeno di sovratensione discriminando tra la parte di questa che cade immediatamente e la parte invece che rimane inglobata in π.

Il bilancio energetico del fenomeno di elettrolisi, per quanto chiaramente definito da un punto di vista teorico, è stato oggetto di poche ricerche sperimentali.

Dopo i classici lavori di Jahn [1]), i quali forniscono un controllo, non sempre diretto e non sempre rigoroso, della ripartizione dell'energia elettrica impiegata tra lavoro chimico ed effetto termico, si trovano nella letteratura poche determinazioni dirette.

Nel 1907 Kaufler [2]) eseguì alcune misure termiche facendo funzionare da calorimetri gli stessi elettrolizzatori, che erano due disposti in serie, riempiti di soluzione di acido solforico della densità 1,206 a $\frac{15}{0}$°C e forniti entrambi di anodi costruiti di lamina di platino lucido: funzionavano da

---

[1]) Jahn H. und Schönrock O., *Beiträge zur Thermodynamik der galvanischen Polarisation* (Z. phys. Chem, XVI pp. 45-71; 1895). — Jahn H., *Ueber die von Batterie während der Zersetzung gelöster Elektolyte zu leistende Arbeit*, etc. (Ibid., XVIII, pp. 399-425; 1895). — Id., *Ueber galvanische Polarisation* (Ibid. XXVI, pp. 385-429; 1898. — Id., *Ueber die galvanische Polarisation in den Lösungen der Alkalisulfate* (Ibid., XXIX, pp. 77-88; 1899).

[2]) Kaufler I., *Zur Erklärung der Ueberspannungs wirkung.* (*Z. f.* Elektrochemie, XIII, pp. 633-637; 1907).

catodi rispettivamente una lamina di platino (non meglio definita), in uno degli elettrolizzatori, ed una lamina di piombo spulito con sabbia, nell'altro.

Adoperando elettrodi di riferimento a calomelano, si misurava il potenziale di lavoro dei due catodi sotto una densità di corrente di 8,25 A/dmq, considerando come sovratensione dell'elettrodo di piombo la differenza tra i due valori così trovati.

Si misurava contemporaneamente la differenza tra le quantità di calore sviluppate nei due elettrolizzatori, avendo avuto cura di verificare prima dell'elettrolisi, avvalendosi dell'ordinario dispositivo a corrente alternata, che la resistenza interna fosse eguale per entrambi.

Nei limiti di approssimazione consentiti da questa tecnica, l'autore potette osservare che l'eccesso di calore sviluppato nell'apparecchio con catodo di piombo coincideva con la quantità di energia corrispondente alla sovratensione, così come sopra definita.

Nel 1913 J. W. Richards [3]) eseguì altre misure, adoperando tre piccole celle elettrolitiche funzionanti come calorimetri e valutando l'energia totale immessa e la quantità di calore corrispondente sviluppata.

Utilizzando successivamente elettrodi di platino, di oro e di nichel, egli trovò che le differenze tra l'energia immessa e le quantità di calore sviluppate corrispondevano in media a 1,49 Volt, valore coincidente con quello che si calcola a partire dal calore di formazione dell'acqua.

Secondo il valore della tonalità termica nella reazione di formazione dell'acqua a partire dagli elementi, che le I. C. T. danno in 286,2 kj, si dovrebbe avere un valore di 1,483 v. [4]).

Quella parte della polarizzazione che corrisponde al termine correttivo di Gibbs ed Helmoltz si ritrova sotto forma di calore, (effetto Peltier) così come avviene per tutta l'energia dissipata per la sovratensione.

Queste esperienze meritavano di essere riprese in modo più sistematico adoperando materiali elettrodici ed elettroliti diversi e cercando di avvalersi di nuovi metodi di misura i quali permettono una ulteriare discriminazione della quantità di energia elettrica che si ritrova nel calorimetro sotto forma di calore.

Se si potesse sicuramente valutare la quantità di energia dissipata sotto forma di effetto Joule attraverso la resistenza ohmica dell'elettrolita si avrebbe modo di discriminare l'ammontare di energia spesa per vincere la sovratensione, giungendo a fissarne l'ammontare complessivo per via indiretta, per il che naturalmente occorrerebbe tener conto del calore Peltier attraverso la conoscenza del coefficiente di temperatura della f. e. m.

Senonchè la valutazione precisa della resistenza interna della cellula elettrolitica adoperata per le misure presenta notevoli difficoltà. Essa non

---

[3]) Richards J. W., *Overvoltage* (Trans. Far. Soc., IX, 140-141; 1913).

[4]) *International Critical Tables.* (vol. V, p. 176. New-York; 1929).

si può calcolare a partire dalle grandezze metriche e dai dati conduttometrici perchè — anche quando si prendano speciali precauzioni per delimitare esattamente il percorso della corrente tra gli elettrodi — sussiste sempre una incertezza in quanto che, per le reazioni secondarie agli elettrodi e per il combinato gioco dei fenomeni di migrazione jonica e di quelli contrastanti di diffusione e di convezione, si deve ritenere che l'elettrolita interposto tra gli elettrodi durante il passaggio della corrente abbia in condizioni di regime una composizione non precisabile, variante da zona a zona e certamente diversa da quella che aveva all'inizio l'elettrolita adoperato.

Non si può misurare questa resistenza con il metodo telefonico perchè — salvo il caso in cui si adoperino elettrodi platinati — intervengono agli elettrodi fenomeni capacitivi (o pseudocapacitivi) i quali fanno perdere alla misura ogni significato [5]).

Abbiamo quindi pensato di adoperare un metodo di misura, da noi messo a punto [6]), consistente nel registrare la caduta istantanea di tensione ΔV che si verifica tra gli elettrodi quando si interrompe bruscamente la corrente alimentatrice I; ma anche questo metodo, come si poteva temere in base alle esperienze di Ferguson [7]) e come le presenti nostre ricerche hanno confermato, non permette di raggiungere lo scopo. Risulta infatti che la sovratensione agli elettrodi consta di due parti, di cui l'una cade immediatamente all'interrompersi della corrente, mentre l'altra declina con lentezza.

La nostra misura della variazione istantanea ΔV viene quindi a comprendere la caduta ohmica RI e la parte transitoria della sovratensione, che designeremo con ρ:

$$\Delta V = \rho + RI.$$

Se con R_0 indichiamo la resistenza dell'elettrolizzatore, calcolata a partire dai dati metrici e conduttometrici per l'elettrolita in riposo, potrà avvenire che R sia eguale maggiore o minore di R_0 ed in generale accade che si trovi $\Delta V > R_0 I$ per la predominanza del termine ρ. Ma si possono dare casi, e ne registriamo in seguito un esempio, nei quali la variazione di resistenza in regime è tale per cui risulti $\Delta V < R_0 I$.

L'unico mezzo che resta per valutare in modo sicuro la caduta RI, metodo non comodo e non di applicazione generale, è quello di adoperare

---

[5]) Newberry E., *The resistence of an electrolytic cell* (Trans. Far. Soc., XV, 126; 1919). — Percy R., *Der Gesamtwiderstand einer elektrolytischen Zelle un seiner Abhängigkeit von der Frequenz der Elektrodenspannung.* Diss. Rostock, 1923.

[6]) Jacopetti M. M. e Beretta U., *La misura della resistenza interna di accumulatori e di elettrolizzatori.* (Rend. XL Riunione Annuale A. E. I., pp. 173-176; 1935).

[7]) Ferguson A. L., *Polarization and overvoltage with special attention given to transfer resistance* (Trans. Am. Electrochem. Soc., LXXVI, 113-143; 1939).

due elettrodi di riferimento a contatto con gli elettrodi di lavoro, come si pratica di regola nella misura della sovratensiono col metodo diretto. In questo caso sottraendo dalla d. d. p. totale la differenza delle due f. e. m. misurate agli elettrodi, o — meglio ancora — misurando la caduta istantanea di tensione tra i due elettrodi di riferimento all'interruzione della corrente, si ottiene l'effettiva caduta RI depurata di ogni altro termine estraneo.

Non era possibile di complicare la nostra già difficile tecnica calorimetrica aggiungendo nell'apparecchio di misura anche gli elettrodi di riferimento e perciò ci siamo limitati alle determinazioni accennate in questa prima serie di misure che avevano soltanto lo scopo di accertare, nel modo più generale, la ripartizione dell'energia fornita all'elettrolizzatore.

Questa, si ripartisce così in due termini: il primo dei quali si valuta col nostro metodo fotografico in modo preciso e corrisponde alla caduta ohmica RI più una parte transitoria della sovratensione; il secondo invece rappresenta quella che comunemente viene designata come polarizzazione di saturazione.

Nelle esperienze che riporteremo qui di seguito, le quali fanno parte di una indagine lunga e difficile che si è venuta lentamente evolvendo nel tempo per quanto riguarda la tecnica operativa, la misura di ΔV, eseguita per mezzo di registrazioue su pellicole fotografiche a passo normale, non è fatta ancora con tutta l'approssimazione possibile. Pertanto non abbiamo creduto di completarla con altre indagini le quali sole permetterebbero di dominare sotto tutti gli aspetti il complesso fenomeno dell'elettrolisi.

Accenneremo soltanto che il termine π comprende: *a)* il potenziale di equilibrio η che avrebbero gli elettrodi nel liquido elettrolitico adoperato e sotto la pressione normale dei gas che vi si sviluppano; *b)* la polarizzazione di concentrazione γ dovuta al fatto che al contatto con ciascuno dei due elettrodi si viene a trovare, in condizioni di regime, una soluzione nella quale la concentrazione dello jone elettrometricamente attivo è diversa da quella nell'elettrolita in riposo; *c)* la parte di sovratensione che cade lentamente col tempo δ.

Ricordiamo che, a sua volta,

$$\eta = \frac{Q}{0{,}239\, nF} + T\frac{d\eta}{dT};$$

di talchè la d. d. p. totale V applicata all'elettrolizzatore consta di sei termini:

$$V = \frac{Q}{0{,}239\, nF} + T\frac{d\eta}{dT} + \gamma + \delta + \rho + RI$$

di questi termini i primi cinque constano di altrettante differenze di valori corrispondenti a due elettrodi.

Le nostre misure consentono intanto di separare tre termini e cioè $\frac{Q}{0{,}239\,nF}$; $\left(T\frac{d\eta}{dT}+\gamma+\delta\right)$ e $(\rho+RI)$. Ulteriori indagini eseguite con elettrodi impolarizzabili di riferimento permetterebbero, come abbiamo accennato, di valutare RI; come pure determinazioni separate permetterebbero nella maggioranza dei casi di calcolare il termine correttivo di Gibbs-Helmoltz $T\frac{d\eta}{dT}$. Restano ancora inseparabili i due termini γ e δ, dei quali si potrà forse in seguito tentare la separazione ricorrendo a prove di confronto tra elettrodi fissi ed elettrodi rotanti.

Dispositivo e risultati sperimentali.

Gli elettrolizzatori adoperati per le misure erano costruiti in modo da poter funzionare direttamente come calorimetri. Essi erano all'uopo allogati (fig. 1) in un piccolo vaso di Dewar V di forma cilindrica ed a fondo conico del diametro di mm 85: questo era contenuto a sua volta in una scatola di cartone di $20\times20\times25$ cm riempita di materiale isolante.

Un tappo di gomma sagomato T portava gli elettrodi A e B, il termometro t e due tubi P e P' in vetro piegati ad U, di cui sarà detto appresso.

Gli elettrodi, di vario materiale, erano ricavati da fogli di un millimetro di spessore ed avevano le dimensioni di 5×10 cm: nella direzione del lato maggiore il rettangolo si prolungava con una striscia di 5×1 cm, la quale serviva per fissare gli elettrodi nel tappo e per l'adduzione della corrente. Nel tappo era praticata una finestrina dove gli elettrodi potevano essere fissati, a mezzo di opportuni blocchetti a cuneo, a distanze variabili. La striscia di sospensione e la faccia di ciascun elettrodo non prospiciente all'altro erano isolate con uno strato di piceina.

Per essere certi che l'elettrolita interessato alla conduzione della corrente fosse per quanto più possibile soltanto quello compreso nel parallelepipedo delimitato dai due elettrodi, perpendicolarmente a questi erano fissate due lastrine di vetro, tenute a posto da opportuni elastici, in modo da completare tutte le facce laterali del parallelepipedo.

Il termometro adoperato, diviso in centesimi di grado, era stato previamente controllato al PTR di Berlino.

Dei due tubi ad U in vetro, l'uno portava una spirale di nichel-cromo S, la quale poteva essere alimentata dalla corrente esterna a mezzo di due conduttori di forte sezione, in modo da localizzare praticamente tutto lo effetto Joule nel calorimetro: l'energia somministrata a questa spirale riscaldante era misurata con apparecchi di precisione controllati al $2\,^0/_{00}$. L'altro tubo era munito in una delle branche di un sistema che permetteva il gocciolamento regolare di etere etilico, mentre l'altro estremo era con-

nesso con una pompa di aspirazione ad acqua: l'evaporazione dell'etere, somministrato in modo regolare, permetteva di mantenere costante la temperatura del sistema durante l'elettrolisi. Ciò era necessario perchè ab-

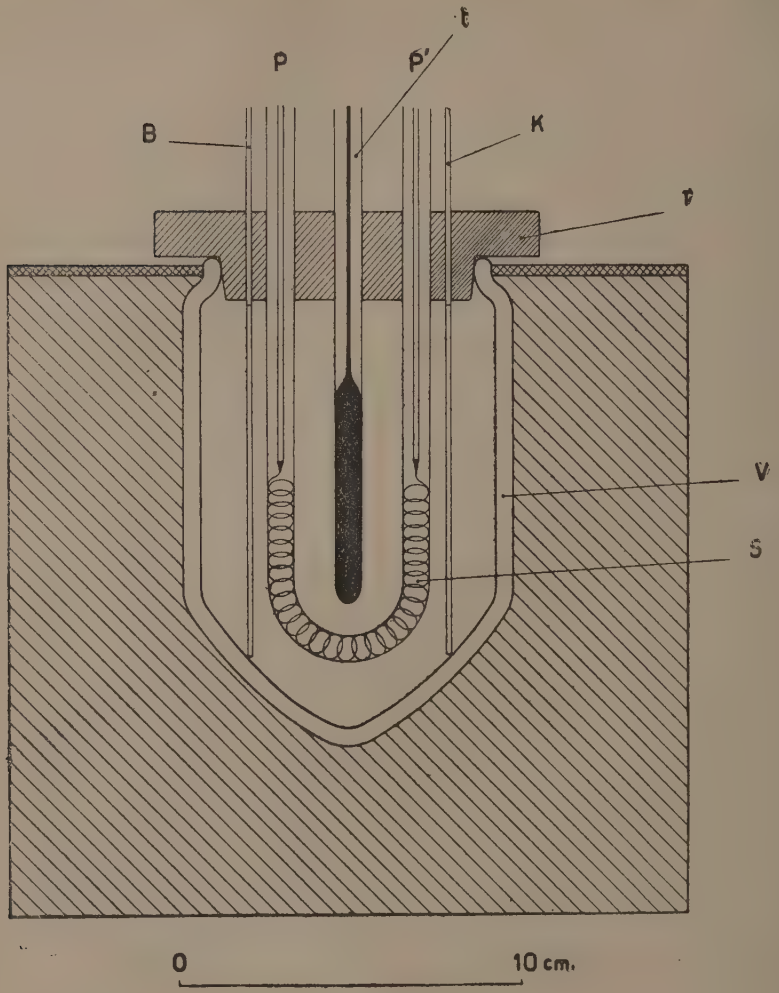


Fig. 1.

biamo ritenuto opportuno di eseguire delle misure in condizioni di regime raggiunte dopo lungo periodo di elettrolisi. Durante questi periodi si manteneva costante la temperatura dell'elettrolizzatore col metodo indicato e, nel momento in cui si desiderava di effettuare la misura, si sospendeva il raffreddamento con etere e si iniziavano le letture termometriche.

Per ogni determinato elettrolita e per ogni coppia di elettrodi, si ese-

guiva preliminarmente la misura della capacità termica del sistema misurando l'aumento di temperatura prodotto dal passaggio di una determinata quantità di energia elettrica ed eseguendo, col metodo grafico, le correzioni per gli intervalli precedenti e susseguenti: il liquido era tenuto in agitazione con un regolare movimento ritmico di oscillazione di tutto il coperchio intorno all'asse ideale del recipiente cilindrico.

Quando si trattava di eseguire le misure partendo da fermo si cominciava ad eseguire direttamente le letture del periodo iniziale e si faceva poi passare una corrente costante per un determinato periodo di tempo (di regola 5 minuti primi): alla interruzione della corrente si agitava rapidamente e si facevano poi le letture per il periodo susseguente. Quando invece si trattava di eseguire le misure sull'elettrolizzatore già funzionante, al momento voluto si interrompeva la corrente, si agitava col solito sistema sino ad uniformizzare la temperatura e si eseguivano poi le varie operazioni nello stesso ordine come sopra indicato per la partenza da fermo.

Gli elettrodi, oltre ad essere connessi con la sorgente alimentatrice e con i relativi apparecchi di misura, erano collegati anche con il nostro solito sistema per la misura della resistenza interna. Durante il periodo di elettrolisi si eseguiva la compensazione fino a ridurre a zero il galvanometro registratore: all'interruzione della corrente questo entrava in funzione per registrare la caduta di tensione e subito dopo anche la taratura di confronto.

In questo modo, per ogni prova, si venivano a conoscere: la forza elettromotrice totale applicata all'elettrolizzatore; la caduta ΔV e quindi, per differenza, la polarizzazione di saturazione π; ed infine la quantità totale di energia dissipata sotto forma di calore.

Le seguenti tabelle da I a IX contengono tutti i dati sperimentali raccolti e cioè:

TABELLA I

Pt — KOH 1,96 N
E = 738,4

$t = 17°$ C; $\varkappa = 0{,}309\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 52{,}3$ cmq; $d = 4{,}7$ cm;
$R_0 = 0{,}291\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t'_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
168	2,00	3,28	94,05	0°070	51,69	42,36	0,90	2,38
169	2,00	3,28	94,05	0°070	51,69	42,36	0,90	2,38
170	2,00	3,28	94,05	0°070	51,69	42,36	0,90	2,38
171	2,00	3,28	94,05	0°070	51,69	42,36	0,90	2,38
174	2,00	3,26	93,47	0°069	50,95	42,52	0,88	2,38
175	2,00	3,25	93,19	0°067	49,47	43,72	0,88	2,37
176	2,00	3,25	93,19	0°069	50,95	42,24	0,88	2,37
Medie	2,00					42,56	0,89	2,38

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}445 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}48$$

TABELLA II

Pt — KOH 1,96 N
E = 738,4

$t = 17°$ C; $\varkappa = 0{,}309\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 52{,}3$ cmq; $d = 4.7$ cm;
$R_0 = 0{,}291\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t'_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
191	4,14	3,91	232,1	0°196	144,7	87,4	1,53	2,38
192	4,13	3,90	231,0	0°195	144,0	87,0	1,51	2,39
193	4,13	3,90	231,0	0°195	144,0	87,0	1,52	2,38
195	4,13	3,87	229,1	0°192	141,8	87,3	1,46	2,41
196	4,12	3,86	227,9	0°190	140,3	87,6	1,46	2,40
197	4,12	3,86	227,9	0°190	140,3	87,6	1,47	2,39
198	4,12	3,86	227,9	0°191	141,0	86,9	1,46	2,40
199	4,13	3,85	227,9	0°190	140,3	87,7	1,46	2,39
200	4,13	3,85	227,9	0°191	141,0	86,9	1.45	2,39
Medie	4,13					87,32	1,48	2,39

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}358 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14.337\ I} = 1{,}47$$

Tabella III

Pt — KOH 1,96 N
E = 738,4

$t = 17°$ C; $\varkappa = 0{,}309\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 52{,}3$ cmq; $d = 4{,}7$ cm;
$R_0 = 0{,}291\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t/_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
224	6,02	4,25	366,7	0°320	236,3	130,4	1,95	2,30
225	6,01	4,30	370,5	0°327	241,4	129,1	1,98	2,32
226	5,99	4,30	369,3	0°328	242,2	127,1	1,97	2,33
227	5,99	4,31	370,2	0°331	244,4	125,8	1,98	2,33
228	5,97	4,31	368,9	0°330	243,7	125,2	1,98	2,33
Medie	6,00					127,5	1,97	2,32

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}327 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}48$$

Tabella IV

Ni — KOH 1,96 N
E = 724,4

$t = 26°$ C; $\varkappa = 0{,}362\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 49$ cmq; $d = 2{,}75$ cm;
$R_0 = 0{,}155\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t'_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
57	2,09	2,35	70,38	0°037	26,80	43,58	0,42	1,93
58	2,09	2,34	70,09	0°035	25,35	44,74	0,40	1,94
59	2,06	2,32	68,51	0°034	24,63	43,88	0,37	1,95
60	2,05	2,36	69,34	0°036	26,07	43,27	0,37	1,99
61	2,07	2,30	68,23	0°033	23,90	44,33	0,40	1,90
62	2,06	2,32	68,51	0°035	25,35	43,16	0,38	1,94
63	2,05	2,33	68,37	0°035	25,35	43,02	0,40	1,93
Medie	2,07					43,71	0,39	1,94

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}188 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}47$$

TABELLA V

Ni — KOH 1,96 N
E = 724,4

$t = 26^0$ C; $\varkappa = 0{,}362\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 49$ cmq; $d = 2{,}75$ cm; $R_0 = 0{,}155\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t/_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
38	3,99	2,69	153,80	0°094	68,09	85,71	0,76	1,93
39	3,95	2,69	152,23	0°093	67,36	84,87	0,76	1,93
40	3,94	2,65	149,65	0°092	66,64	83,01	0,75	1,90
41	3,93	2,64	148,64	0°091	65,91	82,73	0,75	1,89
43	3,91	2,65	148,50	0°088	63,74	84,76	0,74	1,91
44	3,92	2,62	147,21	0°087	63,02	84,19	0,74	1,88
45	3,90	2,63	147,07	0°087	63,02	84,05	0,75	1,88
Medie	3,97					84,19	0,75	1,90

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}188 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}48$$

TABELLA VI

Au — KOH 1,96 N
E = 757,5

$t = 17^0$ C; $\varkappa = 0{,}309\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 56{,}3$ cmq; $d = 4{,}6$ cm; $R_0 = 0{,}206\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t/_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
270	1,99	3,36	95,75	0°072	54,53	41,22	0,90	2,46
271	2,00	3,38	96,90	0°073	55,29	41,61	0,89	2,49
272	1,98	3,35	95,32	0°071	53,77	41,55	0,91	2,44
273	1,97	3,37	94,89	0°071	53,77	41,12	0,90	2,47
274	2,00	3,38	96,90	0°073	55,29	41,61	0,89	2,49
275	2,00	3,39	97,18	0°074	56,05	41,13	0,91	2,48
Medie	1,99					41,37	0,90	2,47

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}452 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}45$$

Tabélla VII

Pt = H_2SO_4 2,04 N
E = 770,1

$t = 17°$ C; $\varkappa = 0{,}369\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 54{,}9$ cmq; $d = 4{,}75$ cm; $R_0 = 0{,}234\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t/_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
235	2,00	2,60	74,55	0°042	32,34	42,21	0.58	2,02
236	2,00	2,61	74,84	0°043	33,11	41,73	0,59	2,02
237	2,00	2,61	74,84	0°043	33,11	41,73	0,60	2,01
239	2,00	2,61	74,84	0°043	33,11	41,73	0,59	2,02
240	1,99	2,63	74,98	0°041	31,57	43,41	0,61	2,02
242	1,99	2,63	74,98	0°043	33,11	41,87	0,61	2,02
243	1,99	2,64	75,27	0°043	33,11	42,16	0,61	2,03
244	1,98	2,64	74,98	0°042	32,34	42,64	0,61	2,03
Medie	2,00					42,18	0,60	2,02

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}300 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}47$$

Tabella VIII

Au — H_2SO_4 2,04 N
E = 776,3

$t = 17°$ C; $\varkappa = 0{,}369\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 56{,}3$ cmq; $d = 4{,}6$ cm; $R_0 = 0{,}221\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t/_\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
277	2,07	3,04	90,18	0°060	46,58	43,60	0,96	2,08
278	2,05	3,02	88,75	0°060	46,58	42,17	0,89	2,13
280	2,02	3,07	88,89	0°059	45,80	43,09	0,87	2,20
286	1,95	3,01	84,16	0°055	42,69	41,47	0,98	2,03
Medie	2,02					42,58	0,93	2,11

$$\frac{\Delta V}{I} = 0{,}460 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}47$$

TABELLA IX

$Pt — K_2SO_4$ 0,5 N | $t = 17°$ C; $\varkappa = 0{,}0384\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$; $S = 54{,}9$ cmq; $d = 4{,}7$ cm;
E = 760,8 | $R_0 = 2{,}28\ \Omega$

N°	I	V	Q_1	$\Delta t/\tau$	Q_2	$Q_1 - Q_2$	ΔV	π
258	2,02	7,01	203,0	0°209	159,0	44,0	3,93	3,08
259	2,04	7,00	204,7	0°211	160,5	44,2	3,95	3,05
264	2,03	6,89	200,6	0°207	157,5	43,1	3,88	3,01
265	2,05	6,78	199,3	0°204	155,2	44,1	3,55	3,23
266	2,05	6,89	202,4	0°208	158,2	44,2	3,68	3,21
267	2,04	6,84	200,0	0°206	156,7	43,3	3,65	3,19
Medie	2,04					43,81	3,77	3,13

$$\frac{\Delta V}{I} = 1{,}85 \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I} = 1{,}49$$

La d. d. p. totale V applicata all'elettrolizzatore, la intensità di corrente I, la quantità di calore $Q = 14{,}337\ V\ I$ equivalente all'energia somministrata per ogni minuto, l'aumento di temperatura $\frac{\Delta t}{\tau}$ corretto e corrispondente ad ogni minuto di elettrolisi, la quantità di calore $Q_2 = E\frac{\Delta t}{\tau}$ ceduta al calorimetro per ogni minuto primo, la differenza $Q_1 - Q_2$ corrispondente alla tonalità termica della reazione, la caduta di tensione ΔV registrata all'istante dell'interruzione di corrente e la polarizzazione di saturazione $\pi = V - \Delta V$.

Per ogni tabella è indicata la natura degli elettrodi e dell'elettrolita, l'equivalente in acqua E del sistema, la temperatura di esperienza t, la superficie libera S degli elettrodi e la loro distanza d, la conduttività dell'elettrolita $\varkappa$ allo stato di riposo e la resistenza $R_0 = \frac{d}{\varkappa S}$ calcolata per il tratto di conduttore elettrolitico interposto tra gli elettrodi.

Dai valori medi di ΔV, di I e delle differenze $Q_1 - Q_2$ sono anche calcolati: la resistenza apparente $\frac{\Delta V}{I}$ e la tensione corrispondente alla tonalità termica della reazione $\frac{Q_1 - Q_2}{14{,}337\ I}$.

Le esperienze sono state eseguite:

1.°) con elettrodi di Pt e con soluzione 1,96 N di KOH alle intensità di corrente di 2, di 4 e di 6 A (Tabelle I, II e III);

2.°) con elettrodi di Ni e con la stessa soluzione alle intensità di corrente di 2 e di 4 A (Tabelle IV e V);

3.°) con elettrodi di Au e con la stessa soluzione di KOH all'intensità di corrente di 2 A (Tabella VI);

4.°) con elettrodi di Pt e soluzione 2,04 N di H_2SO_4 all'intensità di corrente di 2 A (Tabella VII);

5.°) con elettrodi di Au e con la stessa soluzione di H_2SO_4 all'intensità di corrente di 2 A (Tabella VIII);

6.°) con elettrodi di Pt e con soluzione 0,5 N di K_2SO_5 alla intensità di corrente di 2 A (Tabella IX).

In tutti i casi la tensione corrispondente alla tonalità termica della reazione si è mantenuta tra 1,47 ed 1,49 con una media di 1,48 V cui corrisponde la tonalità termica di 285,6 kj: si ha una sola eccezione per gli elettrodi di Au in KOH, per i quali appaiono delle reazioni secondarie.

Tabella X

Elettrodo	Elettrolita	I	ΔV	$R_0 I$	π
Pt	KOH	2,00	0,89	0,58	2,38
		4.13	1,48	1,20	2,39
		6,00	1,97	1,74	2,32
Ni	KOH	2,07	0,39	0,32	1,94
		3,97	0,75	0,61	1,90
Au	KOH	1,99	0,90	0,41	2,47
Pt	H_2SO_4	2,00	0,60	0,46	2,02
Au	H_2SO_4	2,02	0,93	0,44	2,11
Pt	K_2SO_4	2,04	3,77	4,57	3,13

Potrebbe sembrare strano, a prima vista, che compaia il valore 1,49 anche per la soluzione di K_2SO_4; ma si deve qui osservare che specialmente per l'agitazione del calorimetro ai fini della misura si ritrova in pieno il calore di neutralizzazione, talchè la deficienza netta è sempre solo quella che corrisponde alla decomposizione dell'acqua.

Nella tabella X sono messi a confronto, per ognuna delle serie di esperienze, i valori di ΔV con quelli di $R_0 I$. Si verifica, come abbiamo accennato, che di regola $\Delta V > R_0 I$ per il prevalere del termine ρ; ma nel caso del solfato potassico, dove si è adoperato una soluzione di scarsa conduttività iniziale e dove l'alcalinizzazione della zona catodica è suscettibile di dare un sensibile incremento alla conduttanza dell'elettrolita, si constata un valore di $R_0 I > \Delta V$.

Questo fatto, e più ancora il limitato grado di raffinazione di queste misure preliminari, non permettono di prendere in esame, di sviluppare delle considerazioni sulle differenze tra i valori di ΔV e quelli di $R_0 I$.

Nell' ultima colonna della tabella X figurano i valori della polarizzazione di saturazione π. A proposito di questi valori si può dire che, nei limiti di approssimazione delle nostre misure, essi non variano al variare della densità di corrente e se mai mostrano una lieve tendenza a diminuire al crescere di questa. Si conferma così che la parte della sovratensione che aumenta con la densità della corrente è proprio quella che cade istantaneamente alla interruzione del circuito.

Gli elettrodi di Ni sono quelli che danno luogo alla più bassa polarizzazione di saturazione, seguono poi quelli di Pt ed in ultimo vengono quelli di Au, sempre che si operi nelle soluzioni di KOH. La polarizzazione di saturazione però — quando si adoperino sempre elettrodi di Pt — è minima per la soluzione di H_2SO_4, ed assume il valore massimo per quella di K_2SO_4. Benvero in questo caso occorre tener conto della caustificazione catodica, cui corrisponde una tensione di circa 0,6 V; ma anche sottraendo questa quantità dal valore misurato di 3,13 resta un ammontare di 2,53 V.

È interessante infine di osservare che la differenza tra la polarizzazione con elettrodi di Au (2,47 V) e quella con elettrodi di Pt (2,34 V) in soluzione di KOH ammonta a 0,09 V e coincide con quanto si verifica tra le polarizzazioni che gli stessi elettrodi acquistano nelle soluzioni di H_2SO_4 (2,11 — 2,02).

L' autore esprime i suoi sentimenti della più profonda gratitudine al Prof. F. Giordani per l' aiuto avuto nello svolgimento del lavoro.

Napoli, aprile 1942 - XX — Istituto Chimico della R. Università

Risultati di alcune esperienze sulle proprietà meccaniche di ferri normali e ferri meccanicamente incruditi sottoposti preliminarmente a moderate ripetute sollecitazioni dinamiche.

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio ordinario* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 2 maggio 1942 - XX)

Sunto. — Si riferisce su diverse prove di paragone eseguite su ferri meccanicamente incruditi e ferri normali, nei riguardi degli effetti di moderate e ripetute sollecitazioni dinamiche. Esaminato preliminarmente il comportamento a trazione statica e dinamica (resilienza) dei ferri normali e degli incruditi, si sono sottoposti gli uni e gli altri a sollecitazioni dinamiche costituite da rapidi urti ripetuti e si sono poi esaminate le variazioni delle proprietà meccaniche, conseguenti a detto trattamento. Dalle prove si deduce che per il ferro incrudito, che presenta notevole vantaggio rispetto al normale nella resistenza a trazione statica, cresce, dopo il trattamento, tale vantaggio, mentre scompare l'analogo svantaggio nei riguardi delle grandi sollecitazioni dinamiche. Si osserva inoltre che nei provini normali il trattamento ad urti ripetuti può produrre o non in relazione alle diverse altezze di caduta del maglietto, un incrudimento, con i corrispondenti effetti sulle proprietà meccaniche. Si fa in ultimo notare l'importanza pratica dei risultati ottenuti, in relazione alla convenienza di armare le travi di calcestruzzo cementizio con ferri incruditi.

Si dà notizia, nella presente nota, di alcune esperienze eseguite nel Laboratorio prove materiali dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni della R. Università di Napoli, sotto gli auspici della Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d'Italia, aventi per iscopo di istituire un paragone tra il comportamento dei ferri incruditi meccanicamente e quello dei ferri normali, a diverse specie di sollecitazioni, specie dinamiche, e di studiare i fenomeni di incrudimento che si producono nei ferri normali, assoggettati a particolari sollecitazioni dinamiche.

Tali esperienze si collegano in parte ad altre già eseguite nel citato Laboratorio in relazione agli studi compiuti dal direttore del Laboratorio stesso prof. dott. ing. Carlo Luigi Ricci sull'uso dei ferri incruditi quali armature di travi di cemento armato [1]). Al prof. Ricci interessava ora conoscere l'eventuale differenza di comportamento a sollecitazioni di trazione

[1]) v. C. L. Ricci, *Notizie di alcuni gruppi di esperimenti di carattere autarchico su materiali da costruzione e su macchine di prova.* Rend. della R. Acc. di Scienze Fis. e Mat. della Soc. Reale di Napoli, 1938-39, pagg. 4 e 6 dell'estratto.

statica e dinamica tra ferri incruditi per via meccanica, mediante stiramento, e ferri normali, dopo che gli uni e gli altri fossero stati assoggettati a moderate sollecitazioni dinamiche.

La prima parte delle ricerche, delle quali si riferisce nella presente nota, ha appunto per oggetto tale paragone ed è stata eseguita per incarico del prof. Ricci. Secondo le direttive da lui impartite, per realizzare le sollecitazioni dinamiche si è fatto uso di una macchina ad urti ripetuti, esistente nel Laboratorio e che sarà descritta nel prosieguo, somministrando con essa ai provini un certo numero di colpi, frazione di quello producente la rot-

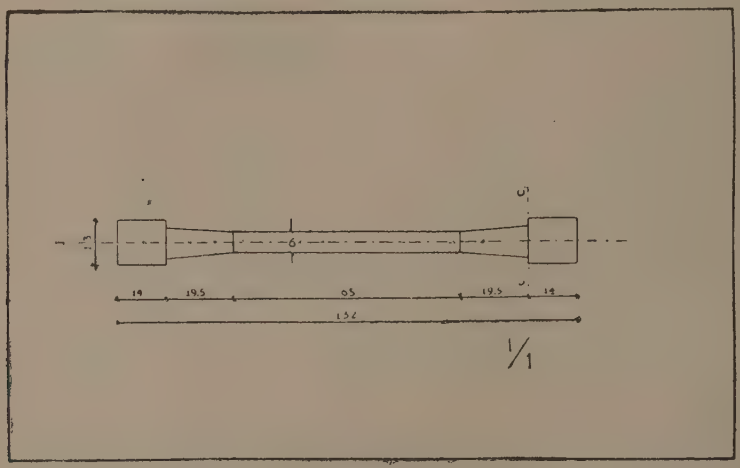


Fig. 1.

tura. Dopo di che i provini stessi venivano sottoposti a trazione statica o dinamica.

L'autore ha condotto tali prove con particolari criteri e modalità, in seguito specificate, e facendosi a volte guidare, dove era il caso, dai risultati che man mano si andavano ottenendo nello svolgimento delle prove stesse.

Da tali risultati ha preso poi lo spunto per condurre altre ricerche, dirette specialmente ad accertare il comportamento dei ferri normali soggetti ad urti ripetuti ed i fenomeni di incrudimento che da tali urti sono prodotti. Di queste ulteriori prove si riferisce nella parte seconda.

La macchina adoperata per imprimere gli urti ripetuti è della casa Amsler. In essa un maglietto, del peso di Kg. 3,5, vien fatto cadere da una altezza che può variare da cm. 2 a cm. 5 e batte sul bordo inferiore del provino. Detto provino ha le dimensioni riportate in fig. 1; delle due teste, la superiore viene stretta in apposita morsa che tiene fisso, in posizione verticale, il provino stesso; sull'inferiore, in corrispondenza del bordo $c = c$, batte il maglietto sopra menzionato. Il numero dei colpi impressi è di 600

al minuto primo; la forza viva per ogni colpo variabile nel seguente modo per le cadute adoperate nelle prove in oggetto:

caduta	cm. 2,5	forza viva Km.	cm. 11,00
»	» 3	» »	» 15,84
»	» 3,5	» »	» 21,57
»	» 4	» »	» 28,17
»	» 4,5	» »	» 35,65.

Parte prima

Si è proceduto anzitutto all'accurata scelta del materiale e dei provini. A tale scopo sono state eseguite alcune prove preliminari a trazione statica su provini ricavati da diverse barre di ferro omogeneo; sono state prescelte quelle barre per le quali i risultati delle prove non presentassero scarti maggiori del 10%. Si avevano difatti per le barre prescelte le seguenti caratteristiche:

carico di rottura da Kg./mmq. 40,6 a Kg./mmq. 44,7
allungamento percentuale dal 30,6 al 34,1.

Successivamente, ogni barra ritenuta idonea è stata suddivisa in tratti di lunghezza minore e tale che da ogni singolo tratto si potessero ricavare tre provini normali e tre incruditi. L'incrudimento è stato prodotto per via meccanica imprimendo alla barra un allungamento del 6%.

Si è quindi eseguito un primo gruppo di prove, indirizzate ad accertare il numero di colpi necessario per produrre la rottura. Si è prescelta, per la esecuzione delle prove, un'altezza di caduta del maglietto di cm. 3,5; e si è preparata una serie di 72 provini (dei quali 36 normali e 36 incruditi) i quali sono stati assoggettati alle seguenti prove:

1) 6 normali e 6 incruditi a trazione statica;
2) 6 normali e 6 incruditi a resilienza per trazione;
3) 12 normali e 12 incruditi a urti ripetuti.

Gli altri 24 provini si riservavano per le prove successive.«

Le prove di cui al n. 1 sono state eseguite mediante la macchina universale esistente nel Laboratorio prove, quelle di cui al n. 2 mediante un pendolo di Charpy anch'esso esistente nel detto Laboratorio. Esse avevano per iscopo di sorvegliare le caratteristiche del materiale.

Le prove di cui al n. 3 sono state eseguite alla macchina per urti sopra descritta.

Dai risultati delle prove si è rilevato anzitutto che la variazione di resistenza fra i diversi provini non raggiunge il 10%, anzi, se si esclude il provino 13 normale, essa raggiunge per i normali il 5% circa, per gl'incruditi il 4% circa.

Per i provini normali si ha un carico di rottura medio (escluso il provino n. 13) di Kg. 1261 e quindi di Kg./mmq. 44,6, con un allungamento del 28,6 % in media [1]); mentre per i provini incruditi si ha un carico di rottura medio di Kg. 1407 e quindi di Kg./mmq. 49,7, con un allungamento del 15,5 % in media. Si riscontrano le proprietà, già note, della maggiore resistenza e della minore deformabilità dei provini incruditi.

Si è inoltre riscontrato, in conformità anche di risultati già noti, che il ferro incrudito è meno resistente del normale alle grandi sollecitazioni dinamiche. Difatti alla prova di resilienza per trazione i provini normali hanno offerto una resistenza di Kgm. 31,7 e quindi di Kgm./mmq. 1,12, con un allungamento del 30,9 % in media (33,1 % se si esclude il provino n. 8), i provini incruditi hanno fornito una resistenza di Kgm. 22,2 cioè Kgm./mmq. 0,79 in media, con un allungamento del 20,6 % in media.

Si è rilevato infine dalle dette prove che il numero dei colpi necessario a produrre la rottura presenta una certa variabilità, sia per i provini normali sia per gli incruditi. È questo un fenomeno che si è osservato nelle diverse serie di prove; ma poichè la determinazione del numero dei colpi necessario a produrre la rottura aveva il solo scopo di fissare con giusto criterio il numero dei colpi da somministrare al provino per sperimentare poi le conseguenze di tale trattamento, non ha costituito grave inconveniente l'aver ottenuto risultati non ben paragonabili tra loro.

A seguito infatti dei risultati ottenuti è stato prescelto, in un primo tempo, il numero di 3000 colpi da somministrare ai provini, evitando così di avvicinarsi alla rottura. E difatti nelle successive prove, delle quali passiamo a dire, nessun provino, normale o incrudito, si è rotto per effetto dei 3000 colpi.

Si sono quindi sottoposti a 3000 colpi, alla macchina ad urti ripetuti di cui sopra e sempre con la caduta di cm. 3,5, i provini che erano stati riservati nel precedente gruppo, cioè 12 normali e 12 incruditi; una metà di essi per ogni specie è stata poi provata a rottura a trazione statica, l'altra metà a trazione dinamica.

A tale serie se ne è aggiunta un'altra costituita di 24 provini (12 normali e 12 incruditi) sempre ricavati dalle stesse barre e per i quali, data la costanza delle caratteristiche meccaniche, dimostrata dalle precedenti prove, si è ritenuto superfluo eseguire prove di controllo a trazione e a resilienza. Essi sono stati invece assoggettati tutti a 3000 colpi e poi sottoposti a rottura, metà per ogni specie a trazione statica, l'altra metà a trazione dinamica.

Dai risultati di tali prove possiamo ricavare i seguenti elementi:

1) I provini normali hanno fornita una resistenza a trazione statica

---

[1]) L'allungamento, per i provini portati a rottura, si è misurato con le abituali norme che regolano le prove di trazione.

compresa tra Kg. 1100 e Kg. 1250 con una media di Kg. 1195; mentre gli analoghi non sottoposti ad urti ripetuti avevano fornita una resistenza media di Kg. 1247, o 1261 se si esclude il provino n. 13.

2) I provini incruditi hanno fornita un'analoga resistenza compresa tra Kg. 1375 e Kg. 1430 con una media di Kg. 1408, mentre quelli non sottoposti al trattamento preliminare dei 3000 colpi avevano fornita una resistenza media di 1407 Kg.

3) I provini normali hanno fornita una resistenza alla prova di resilienza per trazione variabile da Kgm. 4,9 a Kgm. 24,7; scartando però alcuni risultati estremi, si ha una variazione compresa tra Kgm. 16,2 e Kgm. 24,7, con una media di Kgm. 19,1.

4) I provini incruditi hanno offerto un'analoga resistenza variabile tra Kgm. 14,7 e Kgm. 24,8 con una media di Kgm. 19,9.

Possiamo poi ricavarne le seguenti deduzioni:

a) per i provini normali vi è stata una lieve diminuzione di resistenza a trazione statica, pari a circa il 4 % computato sulla media (comprendendovi il n. 13);

b) per i provini incruditi non vi è stata alcuna diminuzione di resistenza a trazione statica nei riguardi della media;

c) i provini normali hanno risentito dal trattamento preliminare dei 3000 colpi una notevole diminuzione di resistenza alla resilienza per trazione, diminuzione che raggiunge il $25 \div 30$ %;

d) i provini incruditi non hanno presentato che modestissima diminuzione di resistenza (3 %) alla resilienza per trazione;

e) il vantaggio dei provini normali rispetto agli incruditi nei riguardi della resilienza è dunque scomparso dopo il trattamento preliminare, mentre si è conservato il vantaggio dei provini incruditi rispetto ai normali nei riguardi della resistenza a trazione statica, vantaggio che è anzi leggermente aumentato.

Da tali risultati si potrebbero già trarre alcune conclusioni. Tuttavia, per maggior prudenza, abbiamo creduto di estendere il campo delle prove, elevando il numero dei colpi costituenti il trattamento preliminare, numero che è stato portato a 6000.

Si sono quindi presi in esame altri 60 provini (30 normali e 30 incruditi), scelti sempre col criterio accennato in principio, e di essi 4 per ogni specie sono stati assoggettati alla prova di trazione statica e altrettanti a quella di trazione dinamica; 18, sempre per ogni specie, sono stati assoggettati al trattamento preliminare di 6000 colpi e poi di essi 9 alla prova di trazione statica, 9 a quella di trazione dinamica; 4 per ogni specie sono stati tenuti in riserva.

I risultati di tali ulteriori prove confermano i precedenti. Difatti, i provini normali senza trattamento preliminare hanno forniti carichi di rottura compresi tra Kg. 1280 e 1300, con una media di Kg. 1285; gl'incruditi tra

Kg. 1420 e 1460 con una media di Kg. 1435. Dopo il trattamento di 6000 colpi, i provini normali hanno fornito carichi di rottura compresi tra Kg. 1200 e 1280, con una media di Kg. 1242, gl'incruditi tra Kg. 1310 e 1530 con una media di Kg. 1420. Si è avuta quindi una diminuzione di resistenza dei provini normali compresa tra il 3 e il 4 %, dei provini incruditi inferiore all'1 %.

A maggior conforto di tali risultati, si è eseguita ancora qualche prova su provini assoggettati a numero di colpi presumibilmente prossimo a quello producente la rottura. I risultati presentano naturalmente qualche irregolarità: un provino incrudito assoggettato al trattamento preliminare di 21000 colpi ha offerto una resistenza di Kg. 1250 a trazione statica; un altro sottoposto a 18000 colpi ha offerto una resistenza di Kg. 1430, sempre a trazione statica; un terzo e un quarto, assoggettati a 14500 colpi ma presentanti un principio di strizione hanno offerto una resistenza di Kg. 1530 e 1450 rispettivamente; un ultimo assoggettato a 20.000 colpi e presentante principio di strizione ha similmente offerto una resistenza di Kg. 1450.

Tali risultati sono molto simili agli altri sopra riportati e confermano che, fino a piccola distanza dalla rottura, ripetute sollecitazioni dinamiche di non grande entità non hanno comportato, per i provini incruditi, apprezzabile diminuzione di resistenza alla trazione statica.

Analoghi risultati si sono conseguiti su qualche provino sottoposto alla prova di resilienza per trazione, dopo il trattamento preliminare.

Si era poi pensato, nel corso degli esperimenti, di mutare un poco il criterio di svolgimento delle prove, nel seguente modo. Poichè si tende a raggiungere, con la somministrazione dei colpi ripetuti, un certo stadio di sollecitazione, frazione di quello producente la rottura, e in corrispondenza un certo stadio di deformazione, si può pensare di fissare non il numero dei colpi ma piuttosto l'allungamento che il provino deve subire per effetto degli urti ripetuti. Dato che il numero dei colpi producente la rottura non può agevolmente prevedersi, è solo in tal modo che può raggiungersi un prefissato stadio di sollecitazione. Tale criterio risulta quindi particolarmente importante per un più preciso studio dei fenomeni osservati. Tuttavia esso non può riuscire di facile applicazione, come è stato confermato da qualche esperienza. Sopratutto per i provini incruditi esso è praticamente ineffettuabile perchè l'allungamento che i provini stessi presentano per effetto degli urti ripetuti è piccolissimo, spesso inferiore a 1 mm., onde anche effettuando le prove con la massima cura e precisione, non si può pensare che si possano raggiungere risultati soddisfacenti e indiscutibili.

Si è pertanto conchiusa, con gli esperimenti di cui sopra, la prima parte della ricerca.

Da tutte le prove sopra menzionate si sono potute dedurre le seguenti conclusioni.

Sollecitazioni dinamiche di non grande entità, realizzate mediante urti

ripetuti, con le caratteristiche sopra specificate, non alterano le proprietà di resistenza meccanica fornite dal ferro incrudito, e ciò va detto sia per la resistenza a trazione statica, sia per quella a trazione dinamica (resilienza per trazione).

Viceversa le stesse sollecitazioni dinamiche producono nei ferri normali una lieve diminuzione di resistenza a trazione statica e una notevole diminuzione di resistenza a trazione dinamica. Così che si accresce il vantaggio dell'uso dei ferri incruditi rispetto ai normali nei riguardi della trazione statica, mentre scompare lo svantaggio degli stessi nei riguardi della trazione dinamica. Ciò può spiegarsi riguardando il provino incrudito come immunizzato, per effetto dell'incrudimento stesso, a risentire l'effetto di ulteriori sollecitazioni, ben inteso di particolare natura, nei riguardi della resistenza. Il che lascia presumere che tale effetto debba essere anch'esso di incrudimento, analogo a quello ottenuto mediante stiramento delle barre di ferro: e su ciò riferiamo nella seconda parte del presente lavoro.

Viene intanto spontaneo il dubbio se sia lecito generalizzare i risultati conseguiti. Gli esperimenti di cui sopra sono stati eseguiti infatti tutti con una determinata altezza di caduta e con una determinata frequenza. Ora si può pensare che tali importanti caratteristiche degli urti somministrati non rimangano senza effetto sulle proprietà dei provini. Da qualche esperienza eseguita a titolo di saggio è subito apparso, intanto, che dette caratteristiche influiscono sui provini normali molto più che sugl'incruditi: e ciò in correlazione con la proprietà di questi ultimi, di immunizzarsi, sopra accennata. È parso quindi opportuno, all'autore, procedere ad un'indagine un po' più sistematica del comportamento del ferro vergine, non incrudito, per poter avere un'idea più chiara dei fenomeni che si studiano.

Parte seconda

Si è preparato un secondo gruppo di provini, ricavati da barre di ferro aventi caratteristiche analoghe a quelle riportate in principio. Tali provini erano tutti normali, vergini, non incruditi.

Le esperienze sono state eseguite variando opportunamente l'altezza di caduta; sono state prescelte le altezze di cm. 2,5, 3,5, 4,5. Si è poi proceduto alla misurazione dell'allungamento diverse volte nel corso delle prove, dopo un determinato numero di colpi. Non è parso necessario eseguire un grande numero di prove, perchè qualitativamente si son subito manifestati i risultati ai quali si mirava, mentre conclusioni quantitative sufficientemente categoriche avrebbero richiesto un numero di prove molto elevato, che del resto l'autore si ripromette di eseguire in un secondo tempo.

Dai risultati di tali prove si è potuto rilevare che limitando la caduta a cm. 2,5, il numero dei colpi che un provino normale può sopportare supera,

in generale, i 100.000. L'allungamento invece si mantiene piccolissimo fino a rottura: dell'ordine di 1 o 2 millimetri, e a volte anche meno.

Con la caduta di cm. 3,5, per la quale numerosi risultati sono stati già riportati nella prima parte della presente relazione, i colpi che il provino può sopportare si riducono di molto, come già si è visto; frequentemente tale numero è compreso tra 10.000 e 20.000. L'allungamento cresce invece, senza raggiungere però, in generale, quello proprio del materiale relativo alla rottura per trazione statica.

Elevando ancora l'altezza di caduta a cm. 4,5, il numero dei colpi producenti la rottura si riduce a un migliaio o meno, mentre l'allungamento cresce ancora raggiungendo il valore che si rileva alle prove di trazione statica.

L'autore ritiene di poter dedurre da tali risultati, presentanti, come si vede, caratteristiche molto diverse, che il ferro normale, sotto l'azione degli urti ripetuti, tende ad assumere due comportamenti in certo qual modo opposti: o tende ad incrudirsi, sopportando un elevato numero di colpi e allungandosi pochissimo, o, viceversa, mantiene le proprie caratteristiche e tende a rompersi più o meno rapidamente, con allungamenti analoghi a quelli che si ritrovano nelle prove a trazione statica.

L'altezza di caduta del maglietto, e per conseguenza la forza viva somministrata in ogni singolo colpo, è quella che determina verso quale comportamento tende il provino. Con piccole altezze di caduta, in altri termini, il provino, prima che possa allungarsi, e conseguentemente rompersi in modo analogo alla rottura statica, si incrudisce, per rompersi poi ad un elevato numero di colpi con scarsissimo allungamento. Con maggiori altezze di caduta, invece, il provino si deforma allungandosi subito, prima che possa incrudirsi. Tale comportamento si rileva anche dall'esame degli allungamenti parziali che il provino subisce durante la prova.

Si osserva infatti che i primi colpi producono notevoli allungamenti, mentre occorre poi un numero sempre più elevato di colpi per produrre lo stesso allungamento. Tale fenomeno è più pronunziato per la caduta di cm. 3,5, com'era prevedibile, perchè, pensiamo, esso dipende dall'incrudimento del provino, che va man mano verificandosi.

Per controllo dei risultati ottenuti si è eseguita qualche prova con caduta di cm. 3 e 4, e si è regolarmente costatato un comportamento intermedio tra quelli relativi alla caduta di cm. 2,5, 3,5, 4,5.

Difatti con caduta di cm. 4, di due provini uno si è rotto dopo 5300 colpi, l'altro dopo 3650 colpi. L'effetto dei primi colpi è stato un rapido allungamento; ma nel frattempo è evidentemente intervenuto il fenomeno dell'incrudimento per cui gli allungamenti successivi sono andati man mano diminuendo, o meglio è andato aumentando il numero di colpi necessario a produrre lo stesso allungamento.

Con la caduta di cm. 3 invece, si ha un andamento molto più simile

a quello proprio della caduta di cm. 2,5. La rottura è avvenuta per un provino a 51060 colpi, per un altro a 87700. L'allungamento è stato modesto ma non piccolissimo, del 5,4 %.

Il cambiamento di comportamento del provino è evidentemente graduale, ma tuttavia esso presenta, secondo i dati sopra riportati, una variazione più brusca tra le cadute di cm. 3 e 3,5; con cm. 3 o meno di caduta, il provino si incrudisce notevolmente, con cm. 3,5 o più ciò non si verifica.

Un ulteriore controllo delle proprietà del provino sottoposto ad urti con varie altezze di caduta è stato conseguito nel seguente modo: si sono sottoposti alcuni provini a 30.000 colpi, con caduta di cm. 2,5, altri a 60.000, con la stessa caduta. Si è poi eseguita la prova di trazione statica di tali provini. Essi hanno fornito carichi di rottura superiori e non inferiori, come nelle prove di cui all'inizio della presente nota, a quello fornito da provini vergini di trattamento, a trazione statica. L'aumento è in media del 5 % circa, al posto della diminuzione del 3 o 4 %. Ciò conferma l'effetto di incrudimento, almeno parziale, dovuto agli urti ripetuti. Si nota altresì che i carichi di rottura sono stati praticamente gli stessi per i provini assoggettati a trattamento preliminare di 30.000 e per quelli assoggettati ad analogo trattamento di 60.000 colpi, il che conferma che l'incrudimento, con tale altezza di caduta, si verifica fin dall'inizio della prova.

Tutte tali prove sono state eseguite su provini non incruditi. Il che è giustificato dall'esito delle prove stesse che hanno rivelato i fenomeni che vanno svolgendosi durante la somministrazione degli urti, mediante gli effetti chiaramente osservabili sui provini normali. Sugli incruditi invece non sono da attendersi tali effetti, data l'immunizzazione a cui si è accennato più su. La variazione di altezza di caduta influisce evidentemente, nei provini incruditi preventivamente, sul numero dei colpi necessario a produrre la rottura; ma non ingenera un cambiamento di comportamento nel provino, dato che essa dovrebbe produrre, in corrispondenza delle piccole cadute, un fenomeno di incrudimento, al quale il provino già incrudito non è sensibile. Ciò del resto è stato controllato in alcune prove, mentre altre saranno sviluppate in un secondo tempo.

Circa il cambiamento di frequenza nella somministrazione dei colpi, pur senza voler anticipare dei risultati che solo l'esperienza può fornire, non sembra probabile, per ragioni che risultano chiare da tutta la precedente esposizione, che esso possa modificare, qualitativamente, i risultati ottenuti.

L'autore dal resto prosegue le ricerche sull'argomento, e si ripromette di indagare anche sull'effetto del detto cambiamento di frequenza.

CONCLUSIONI

Le conclusioni che si traggono dalle prove sopra descritte possono così riassumersi.

Il ferro meccanicamente incrudito presenta un vantaggio rispetto a quello normale nei riguardi delle sollecitazioni statiche: nelle prove eseguite esso ha offerto, a trazione statica, una resistenza maggiore di circa l' 11,5 %. Tale situazione si capovolge nei riguardi delle grandi sollecitazioni dinamiche: i provini normali hanno offerto, difatti, alla prova di resilienza per trazione, una resistenza maggiore di circa il 43 % rispetto agli analoghi incrudimenti. Ciò è in corrispondenza di quanto osservato nelle travi di calcestruzzo cementizio armato con ferri normali e incruditi di cui alle citate « Notizie » del prof. Ricci [1]).

Se si sottopongono i ferri incruditi e normali a moderate sollecitazioni dinamiche (urti ripetuti) il vantaggio dell' uso dei ferri incruditi nei riguardi della rottura per trazione statica cresce, raggiungendo il 17,8 % circa, dato che i ferri normali presentano una diminuzione di resistenza per effetto degli urti ripetuti, mentre gl' incruditi non subiscono variazioni di resistenza praticamente apprezzabili. Scompare invece lo svantaggio dei ferri incruditi rispetto ai normali in relazione alla prova di trazione dinamica (resilienza), data la notevole diminuzione di resistenza che presentano i provini normali in detta prova, per effetto delle precedenti moderate sollecitazioni dinamiche per urti ripetuti.

Questo risultato è particolarmente importante perchè è molto più probabile che in pratica si producano numerose e moderate sollecitazioni dinamiche nelle strutture che sono intanto sottoposte a sollecitazioni statiche, anzichè si verifichino grandi ed isolate sollecitazioni dinamiche.

Riferendoci ora p. es. alle strutture di cemento armato, potremo dire che l' uso dei ferri incruditi invece dei normali nelle travi di cemento armato si presenta quasi sempre conveniente, offrendo un notevole vantaggio nei riguardi della resistenza statica anche quando tali travi siano assoggettate a moderate sollecitazioni dinamiche.

Dalle prove riportate nella seconda parte si deduce poi che ove si producano effettivamente su una struttura di calcestruzzo cementizio armato con ferri normali moderate sollecitazioni dinamiche, potrà verificarsi un incrudimento dei ferri di armatura, accompagnato da un aumento di resistenza alle sollecitazioni statiche.

Le ricerche delle quali si è riferito presentano dunque un immediato interesse pratico, e un esteso campo di applicazione.

---

[1]) pagg. 4 e 5 dell' estratto.

Metodo di influenza e di successiva introduzione di incognite per il calcolo dei telai multipli mediante le rotazioni ai nodi.

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio ordinario* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 2 maggio 1942 - XX)

Sunto. — Si espone un metodo di calcolo per i telai multipli, mediante il quale si ottengono coefficienti d'influenza, e, partendo da uno schema semplice, p. es. dal portale semplice, s'introduce gradualmente la solidarietà con gli altri telai.

Si scelgono quali incognite le rotazioni ai nodi, e assegnando una rotazione relativa eguale ad 1 tra due campate, si calcolano dei numeri d'influenza, mediante i quali si possono ottenere i risultati relativi a qualsiasi condizione di carico. Tali numeri d'influenza possono ricavarsi considerando successivamente sistemi con una, due, più rotazioni ai nodi incognite, introducendo tali rotazioni una alla volta.

Il metodo esposto, conservando in gran parte i vantaggi di quello delle rotazioni ai nodi, offre quelli di fornire risultati d'influenza, e di consentire, attraverso l'introduzione successiva delle incognite, di arrestare il calcolo, e quindi la considerazione della solidarietà tra i diversi telai, quando si sia raggiunta l'approssimazione che si desidera.

Alcuni esempi numerici chiariscono il procedimento.

1. Il calcolo dei telai multipli si suole spesso eseguire servendosi del metodo delle rotazioni ai nodi: tale metodo comporta, rispetto ad altri, pur fondati su concetti analoghi, semplificazioni a volte sensibili, per il fatto che, in generale, viene ridotto il numero delle equazioni formanti sistema.

Noi però abbiamo altra volta mostrato [1]) come sia conveniente, quando il numero delle incognite iperstatiche è piuttosto elevato, introdurre le incognite stesse una alla volta, mediante un metodo d'influenza, conseguendo in tal modo un duplice risultato: raggiungere una semplificazione nel calcolo, con la possibilità, che costituisce un importante vantaggio, di eseguire verifiche e controlli dopo l'introduzione di ogni incognita, ed ottenere risultati d'influenza, indipendenti cioè dai carichi effettivamente agenti.

Si può ora pensare di unire i vantaggi dei due metodi, scegliendo quali incognite le rotazioni ai nodi ed introducendo i vincoli uno alla volta, col

---

[1]) F. Jossa, *Metodo di influenza per il calcolo di strutture iperstatiche mediante la successiva introduzione dei vincoli.* « Ricerche d'Ingegneria ». Roma, 1938. — Id., *Risoluzione progressiva di un sistema di equazioni lineari. Analogia con un problema meccanico.* Rend. della R. Accademia delle scienze fis. e mat. Napoli, 1940.

risultato di conservare in massima parte i vantaggi di tali metodi, ora enunciati, e di conseguirne un altro, che ci sembra di particolare importanza per le strutture costituite da telai multipli o da travi continue. Tale vantaggio è il seguente: introducendo le incognite una alla volta, si può subito controllare qual'è l'influenza che il vincolo corrispondentemente introdotto esercita sui valori delle incognite già determinate, ed arrestare quindi la considerazione della solidarietà delle diverse parti della struttura quando la detta influenza si riveli praticamante trascurabile: ciò che sarà accertato volta per volta in base ad elementi concreti, cioè con i risultati del calcolo già sviluppato, e non in base ad elementi generici presunti.

Il prosieguo della presente esposizione chiarirà meglio i concetti ora accennati.

2. Per rendere più chiara la trattazione, riferiamoci ad un caso particolarmente semplice ma nello stesso tempo fondamentale, prendendo in esame una trave continua ad asse rettilineo o spezzato.

La rotazione φ_i su un appoggio, corrispondente ai momenti agenti sui diversi appoggi, si può esprimere mediante la relazione:

$$\varphi_i = -\Sigma \vartheta_{ik} \alpha_k \qquad (1)$$

essendo ϑ_{ik} la rotazione assoluta sull'appoggio i-esimo dovuta alla rotazione relativa eguale a 1 sull'appoggio k, delle due campate che terminano a tale appoggio, e α_k l'analoga rotazione relativa prodotta dalle forze esterne sull'appoggio k-esimo, quando consideriamo scissa la continuità.

Mediante considerazioni fondate sul principio di sovrapposizione degli effetti possiamo giustificare la relazione:

$$M_i = -\Sigma m_{ik} \alpha_k \qquad (1')$$

dove M_i è il momento sull'appoggio i-esimo, nel sistema iperstatico, e m_{ik} è il momento provocato su detto appoggio da una rotazione relativa eguale a 1, come sopra specificata, assegnata sull'appoggio k-esimo. Ma ai momenti m_{ik} come a quelli M_i corrispondono determinate rotazioni assolute, onde è lecito il passaggio da detti momenti alle rotazioni, è cioè ammissibile la (1).

Osserviamo poi che alla (1) si può dare un'altra forma. Supponiamo, per fissare le idee, che sulla trave insistano sole forze concentrate Q di componenti Q_x, Q_y secondo gli assi x e y, e indichiamo con $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ gli spostamenti nei punti di applicazione dei carichi, nelle direzioni degli assi x e y. Si ha:

$$\alpha_k = \Sigma (\alpha'_{0k} Q_x + \alpha''_{0k} Q_y)$$

essendo α'_{0k} e α''_{0k} le rotazioni nel nodo k-esimo provocate dalle forze $Q_x = 1$ $Q_y = 1$, rispettivamente. Per il teorema di Betti è poi:

$$\alpha'_{0k} = u^{(k)} \qquad \alpha''_{0k} = v^{(k)}$$

onde:

$$\varphi_i = -\Sigma \vartheta_{ik} \Sigma (Q_x u^{(k)} + Q_y v^{(k)}). \tag{2}$$

La (2) si estende ovviamente ai sistemi spaziali e a quelli in cui agiscano forze ripartite.

Essa è in certo qual modo duale di quella stabilita dal Ricci, che fornisce il valore della reazione iperstatica $R^{(i)}$ [1].

3. L'applicazione della (1) dà luogo alla risoluzione della trave continua e quindi dei telai mediante numeri d'influenza ϑ_{ik}. Essa offre quindi gli stessi vantaggi che forniscono i metodi fondati sul tracciamento delle linee d'influenza, pur presentando una notevolissima semplicità di procedimento.

Si può infatti combinare il metodo delle rotazioni ai nodi con quanto ora detto nel seguente modo. In tutti i nodi si possono scrivere le equazioni di equilibrio:

$$\Sigma M_i = 0 \tag{3}$$

nelle quali i momenti M_i sono legati alle rotazioni dalle notissime espressioni:

$$M_{ij} = \frac{1}{w}(4\varphi_i + 2\varphi_j) \tag{4}$$

se supponiamo nulle le forze esterne e gli spostamenti dei nodi o appoggi. Le ϑ_{ik}, che sono numeri d'influenza, non dipendono infatti dalle forze esterne ma dalla rotazione assegnata, eguale a 1, sull'appoggio k-esimo. Su di esso bisognerà quindi porre la condizione:

$$\varphi''_k - \varphi'_k = 1 \tag{5}$$

essendo φ'' e φ' le rotazioni a destra e a sinistra dell'appoggio. Ma poichè a noi occorrono le espressioni delle rotazioni ϑ_{ik} e non dei momenti m_{ik}, basta risolvere il sistema fornito dalle (1) e (5), mentre risulta superfluo il successivo calcolo dei M_{ij}.

---

[1]) C. L. Ricci, *Generalizzazione del secondo teorema di Castigliano.* Atti della S. I. P. S. Bolzano-Trento, 1930.

Calcolate così le ϑ_{ik}, basta applicare la (1) per risolvere qualunque caso concreto.

Le ϑ_{ik} sostituiscono, come si è detto, le corrispondenti linee d'influenza.

4. Ma, ciò che più importa, l'applicazione del metodo indicato permette di conseguire un ulteriore vantaggio, mediante la successiva introduzione delle incognite.

Su tale procedimento abbiamo già portata altra volta, come detto più su, la nostra attenzione, onde ci limitiamo ad indicarne l'applicazione al caso presente.

Basta riflettere che, risolto il sistema con $n-1$ incognite, si può introdurre l'n-esima incognita assegnando la rotazione $\varphi_n = 1$ in corrispondenza dell'appoggio n-esimo. Assegnare una rotazione, che potremmo dire esterna, corrisponde concettualmente all'analogo caso, più frequente nella pratica e più consono al nostro abituale modo di pensare, nel quale si assegnano forze esterne. La (1), applicata al sistema con $n-1$ incognite, risolve quindi il problema della ricerca delle φ_i, che mentre vengono calcolate con espressioni proprie al sistema con $n-1$ incognite, già risolto, e quindi da considerarsi quale isostatico rispetto a quello con n incognite, forniscono i valori delle ϑ_{nk} nel sistema con n incognite.

Per calcolare poi le ϑ_{ik} con i e k diversi da n, si applicano le espressioni già trovate nei nostri studi citati, opportunamente interpretate, per avere i nuovi valori, nel sistema con n incognite, delle incognite dalla prima alla $n-1$-esima, i cui valori nel sistema con $n-1$ incognite sono già noti. Si ha infatti, per i e j diversi da n e dando l'apice (r) alle ϑ relative al sistema con r incognite

$$\vartheta_{ij}^{(r)} = \vartheta_{ij}^{(r-1)} + \vartheta_{ir}\vartheta_{rj}.$$

5. Quando, invece di una trave continua, occorre risolvere un sistema costituito da telai multipli, si procede in modo analogo, considerando opportunamente i nodi di connessione multipla quali sedi di diverse incognite iperstatiche. In altri termini si assegneranno le rotazioni relative eguali a 1, nel nodo, tra le diverse coppie di travi concorrenti nel nodo stesso, come si vede in uno degli esempi che seguono. Dopo di che si determineranno, come sopra si è detto, le rotazioni assolute nei diversi nodi, multipli o non. Di eventuali spostamenti di nodi (o, nel caso della trave continua, dislivelli di appoggi) si tien conto adottando, al posto della (4) la nota relazione:

$$M_{ij} = \frac{1}{w}(4\varphi_i + 2\varphi_j - 6\alpha) \qquad (4')$$

essendo α la rotazione prodotta dal dislivello degli appoggi.

6. Alcuni esempi concreti chiariranno ulteriormente i concetti sopra esposti.

1.° *Esempio. — Trave continua a tre campate.*

Consideriamo anzitutto una trave continua a due campate. L'incognita, una sola, è il momento sull'appoggio centrale. Supponiamo, per semplicità, che le due campate abbiano lo stesso peso elastico w.

La condizione da porre è:

$$\varphi_1'' - \varphi_1' = \vartheta_{11}'' - \vartheta_{11}' = 1$$

indicando con φ_i le rotazioni sugli appoggi, provocate dalla condizione assegnata, con ϑ_{ik} le φ_i che si producono sugli appoggi sovrabbondanti, sedi di incognite iperstatiche.

Per le (4), essendo $M_{01} = M_{21} = 0$, si ha:

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\varphi_1' \qquad \varphi_2 = -\frac{1}{2}\varphi_1''.$$

E la (2) fornisce:

$$4\varphi_1' + 2\varphi_0 + 4\varphi_1'' + 2\varphi_2 = 0.$$

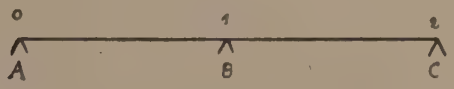


Fig. 1.

Dalle quali:

$$\varphi_1' = \vartheta_{11}' = -\frac{1}{2} \qquad \varphi_1 = \vartheta_{11}'' = \frac{1}{2} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{4} \qquad \varphi_2 = -\frac{1}{4}.$$

Per controllo, calcoliamo il valore del momento incognito, supponendo che sulla trave agisca un carico di q kg/ml. È allora:

$$\alpha_k = 2\frac{ql^2}{24}w$$

e quindi:

$$\varphi'_B = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{12}w = \frac{1}{24}ql^2 \qquad \varphi''_B = -\frac{1}{24}ql^2w \qquad \varphi_A = -\frac{1}{48}ql^2w \qquad \varphi_C = \frac{1}{48}ql^2w.$$

Onde:

$$M_{10} = \frac{1}{w}\left(\frac{4}{24} - \frac{1}{24}\right) ql^2 w = \frac{1}{8} ql^2$$

$$M_{12} = \frac{1}{w}\left(-\frac{4}{24} + \frac{1}{24}\right) ql^2 w = -\frac{1}{8} ql^2$$

com'è notissimo.

Introduciamo ora la solidarietà con la terza campata, essendo sempre le campate di peso elastico eguale. Le incognite sono due, i momenti sugli appoggi centrali.

Applicando i concetti esposti al n. 3, cercando cioè la soluzione d'influenza, senza introdurre gradualmente le incognite, si deve porre, come prima:

$$\varphi_1'' - \varphi_1' = \vartheta_{11}'' - \vartheta_{11}' = 1.$$

La (4) applicata alla prima e all'ultima campata fornisce:

$$\varphi_0 = -\frac{\varphi_1'}{2} \qquad \varphi_2 = -\frac{\varphi_2}{2}.$$

Poi, per la (3), si hanno le:

$$2\varphi_0 + 4\varphi_1' + 4\varphi_1'' + 2\varphi_2 = 0$$
$$2\varphi_1'' + 8\varphi_2 + 2\varphi_3 = 0.$$

Dalle quali risulta:

$$\varphi_0 = \frac{4}{15} \qquad \varphi_1' = \vartheta_{11}' = -\frac{8}{15} \qquad \varphi_1'' = \vartheta_{11}'' = \frac{7}{15} \qquad \varphi_2 = \vartheta_{21} = -\frac{2}{15} \qquad \varphi_3 = \frac{1}{15}$$

e quindi, indicando con φ_A, φ_B, φ_C le rotazioni totali in 0, 1, 2 rispettivamente, e nel caso, che il carico sia uniformemente ripartito di intensità q kg/ml [1]:

$$\varphi_B' = -\Sigma \vartheta_{1k} \alpha_k = -\left| -\frac{8}{15} + \frac{2}{15} \right| \frac{ql^2}{12} w = \frac{1}{30} ql^2 w$$

$$\varphi_B'' = -\left(\frac{7}{15} + \frac{2}{15}\right) \frac{ql^2}{12} w = -\frac{1}{20} ql^2 w$$

---

[1]) Si è cambiato segno al ϑ_{12} perchè esso é eguale al ϑ_{21} anche in segno quando in 2 si applichi la rotazione relativa eguale a 1 simmetrica di quella applicata in 1, e quindi si scambino tra loro non solo gl'indici 1 e 2 ma anche gli apici ′ e ″, come si vedrà anche in seguito; qui lo scambio degli apici non si è operato.

$$\varphi_A = -\frac{1}{2}\varphi'_B = -\frac{1}{60}pl^2w$$

$$\varphi_C = -\frac{1}{2}\varphi''_B = \frac{1}{20}ql^2w$$

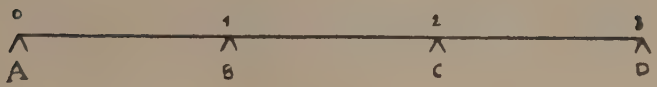


Fig. 2.

dalle quali:

$$M_{10} = -\frac{1}{w}\left(\frac{1}{30} - \frac{4}{30}\right)ql^2w = \frac{1}{10}ql^2$$

$$M_{12} = \frac{1}{w}\left(-\frac{4}{20} + \frac{2}{20}\right)ql^2w = -\frac{1}{10}ql^2$$

com'è notissimo.

Si può anche utilizzare la (1') calcolando gli m_{ik} che corrispondono ai ϑ_{ik} sopra trovati; e si ha:

$$m_{10} = -\frac{1}{w}\frac{8}{5} \qquad m_{12} = \frac{1}{w}\frac{8}{5}$$

$$m_{21} = \frac{1}{w}\frac{2}{5} \qquad m_{23} = -\frac{1}{w}\frac{2}{5}$$

onde:

$$M_1 = -\frac{1}{w}\left(\frac{8}{5} - \frac{2}{5}\right)2\frac{ql^2}{24}w = -\frac{1}{10}ql^2.$$

Donde si vede che si può utilizzare indifferentemente la (1) o la (1').

Risolvendo invece il caso in esame mediante l'introduzione del secondo momento iperstatico nel sistema con un'iperstatica già risolto, procederemo nel seguente modo. Applichiamo in 2 due momenti $\pm M$. Avremo, essendo l'unica ϑ_{ik} la $\vartheta_{11} = \pm\frac{1}{2}$

$$\varphi''_1 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}Mw\right) = \frac{1}{12}Mw$$

$$\varphi'_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}Mw\right) = -\frac{1}{12}Mw$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{24} Mw$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{24} Mw.$$

Onde in 2 si avrà, per la sezione a sinistra dell' appoggio una rotazione totale:

$$\varphi'_C = -\frac{1}{24} Mw + \frac{1}{3} Mw = \frac{7}{24} Mw$$

mentre a destra si ha:

$$\varphi''_C = -\frac{1}{3} Mw = -\frac{8}{24} Mw.$$

Perchè sia, simmetricamente a quanto posto più su per l'appoggio 1:

$$\varphi'_C - \varphi''_C = \frac{15}{24} Mw = 1$$

dev' essere

$$M = \frac{8}{5w}$$

ed allora:

$$\delta_{11} = -\frac{1}{12} w \frac{8}{5w} = -\frac{2}{15}$$

$$\delta'_{21} = \frac{7}{24} w \frac{8}{5w} = \frac{7}{15}$$

$$\delta''_{21} = -\frac{8}{24} w \frac{8}{5w} = -\frac{8}{15}$$

valori che coincidono con quelli precedentemente trovati, quando si rifletta che è sempre

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

e che per la simmetria è nel nostro caso:

$$\delta_{22} = \delta_{11}.$$

2.° *Esempio. — Portali.*

Ricerchiamo anzitutto la soluzione d'influenza per il portale semplice, e supponiamo che siano eguali i pesi elastici del ritto e del traverso.

Si ha:

$$M_{AB}=\frac{1}{w}(2\varphi_B-6\alpha);\qquad M_{BA}=\frac{1}{w}(4\varphi_B-6\alpha)\qquad M_{BC}=\frac{1}{w}(6\varphi_B+2\varphi''_C)$$

$$M_{CB}=\frac{1}{w}(2\varphi_B+4\varphi''_C)\qquad M_{CD}=\frac{1}{w}(4\varphi'_C-6\alpha)\qquad M_{DC}=\frac{1}{w}(2\varphi'_C-6\alpha).$$

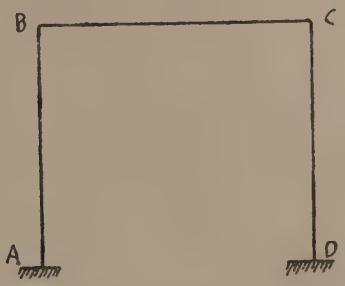


Fig. 3.

Le equazioni risolutrici sono:

$$M_{BA}+M_{BC}=0\qquad M_{CB}+M_{CD}=0$$

$$M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC}=0\qquad \varphi''_C-\varphi'_C=1$$

e risulta, dopo gli opportuni brevi sviluppi:

$$\vartheta'_{22}=\varphi'_C=-\frac{25}{42}\qquad \vartheta''_{22}=\varphi''_C=\frac{17}{42}\qquad \vartheta_{12}=\varphi_B=-\frac{11}{42}\qquad \alpha=-\frac{9}{42}.$$

Per la simmetria è

$$\vartheta_{11}=\vartheta_{22}.$$

Poi si ha:

$$m_{AB}=\frac{1}{w}\frac{32}{42}\qquad m_{BA}=\frac{1}{w}\frac{10}{42}=-m_{BC}$$

$$m_{CB}=-m_{CD}=\frac{1}{w}\frac{46}{42}\qquad m_{DC}=\frac{1}{w}\frac{4}{42}.$$

E risulta, ad esempio e per controllo, nel caso di un carico uniformemente ripartito sul traverso:

$$M_B = -\frac{ql^2}{24}\left(\frac{10}{42}+\frac{46}{42}\right) = -\frac{ql^2}{18}$$

mentre si possono ottenere con la stessa facilità i risultati relativi a qualunque condizione di carico.

Se si vuol calcolare uno schema di telai multipli, come, p. es., il telaio doppio *ABCDEF*, per servirsi della successiva introduzione delle incognite iperstatiche si comincia dal calcolo del portale semplice, come sopra riportato, e vi si aggiunge poi il traverso *CE*, considerato poggiato in *E*. Due momenti *M*, applicati in *C* ai traversi *CB* e *CE* rispettivamente, provocano

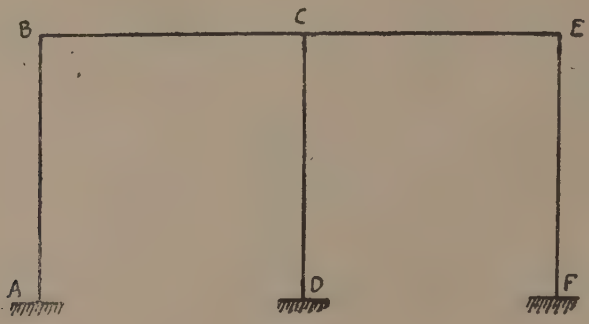


Fig. 4.

rotazioni φ_B , φ_{CB} , φ_{CE} che si sanno calcolare, per quanto sopra è detto: si può quindi porre la condizione, come si è fatto per la trave continua,

$$\varphi_{CB} - \varphi_{CE} = 1$$

condizione che determina le nuove ϑ. Successivamente e in modo perfettamente analogo si introduce il ritto *EF* e si assegnano le rotazioni φ_{EC} , φ_{EF} tali che

$$\varphi_{EC} - \varphi_{EF} = 1.$$

In tal modo è risolto il portale doppio.

7. Anzichè sviluppare però ancora qualche esempio, ci riserviamo di fornire i risultati numerici relativi a diversi casi frequenti nella pratica, nei quali verrà posto in luce il contributo che i vincoli che si andranno man mano introducendo portano al valore di quelli già introdotti, secondo

quanto si è esposto più su. Ciò anche per la ragione che il vantaggio del metodo si manifesta non nell'applicazione a schemi molto semplici, ma in quella a schemi complessi; e tanto più quanto maggiore è la complessità stessa. Gli esempi sopra riportati valgono però a render chiaro il modo di applicazione del procedimento sopra esposto a casi concreti.

Richiamiamo ancora l'attenzione sui due seguenti punti che ci sembrano di notevole importanza:

1) L'applicazione del metodo sopra esposto risolve con la maggior semplicità il problema del comportamento delle travi continue e dei telai sotto l'azione di carichi mobili o comunque variabili in posizione ed intensità.

2) Tale applicazione fornisce i valori delle incognite grado a grado, man mano che si introducono, e correggendo ogni volta i valori di quelle già trovate, offrendo quindi la possibilità di fermarsi, nel calcolo, quando si sia raggiunto il grado di approssimazione che si vuole e che viene precisato dallo svolgimento del calcolo stesso.

Cenni sulla formazione gessoso-solfifera del bacino del Neto in Calabria

Nota dell' ing. **Roberto Signorini**, *presentata dal socio* **G. Checchia-Rispoli**

(Adunanza del dì 7 febbraio 1942 - XX)

Sunto. — Nel quadro dei terreni cenozoici che si stendono tra il massiccio cristallino della Sila e il mare Jonio, l' A. delinea l' andamento della formazione gessifera; questa è particolarmente notevole quale sede di giacimenti di zolfo e altresì per la localizzazione in essa di « argille scagliose », che l' A. ritiene dovuta a colate di materiale fliscioide giunte durante la sedimentazione della formazione gessifera.

Fra le montagne della Sila e il mare Jonio [1]) si estende un' ampia zona collinosa (comprendente i dintorni di Cariati, Cirò, Strongoli e Crotone), costituita da sedimenti neogenici che, fra altri corsi d' acqua minori, il Neto attraversa per una trentina di chilometri da ovest ad est e solca con la rete idrografica del suo tronco inferiore. La costa jonica ha in questo tratto direzione nord-sud come il bordo orientale del massiccio cristallino (filladi, micascisti, gneiss e graniti) della Sila, e tra queste due linee è compresa la zona collinosa neogenica: la maggior parte di questa è costituita da sedimenti argillosi e sabbiosi del Pliocene.

Mentre a sud la distesa di terreni pliocenici arriva fino al golfo di Squillace, a nord essa è limitata dalla dorsale di San Nicola dell' Alto che separa il bacino del Neto (e più precisamente del suo affluente Vitravo) da quello del Lipuda. Su questo bordo settentrionale gli strati si sollevano verso nord e vengono ad affiorare i terreni sottostanti a quelli pliocenici: la formazione gessoso-solfifera e quella delle argille e conglomerati inferiori (Miocene) che si estende ampiamente più a nord. Lungo il bordo occidentale pure salgono ad affiorare gli stessi terreni, più ridotti, che si vedono poggiare direttamente sui terreni cristallini del massiccio silano.

La zona di formazione gessoso-solfifera che affiora al bordo settentrionale e occidentale dei terreni pliocenici del bacino del Neto, offre un particolare interesse per due fatti ad essa esclusivi: l' esistenza di giacimenti

---

[1]) Sulla geologia della regione si hanno le carte del R. Ufficio geologico d' Italia, rilevate più di cinquant' anni or sono dal Cortese, e la descrizione geologica della Calabria dello stesso (Vol. IX delle Memorie descrittive della Carta geologica d' Italia, Roma 1895, e 1.ª rist. Firenze, 1934). La figura 1 ne riassume qui la situazione geologica generale. La presente pubblicazione è stata autorizzata dalla Direzione Centrale dell' Azienda Generale Italiana Petroli.

di zolfo oggetto di sfruttamento industriale e la presenza di argille scagliose (materiale fliscioide riferito all' Eocene).

I terreni pliocenici che costituiscono il bacino del Neto presentano un esteso desolato arido paesaggio di colline franose. Sono argille, sabbie più o meno cementate e conglomerati in placche variamente inclinate, ma senza che le pendenze si armonizzino in un quadro di pieghe; il Pliocene non è

Fig. 1. — Schizzo geologico d'insieme della Calabria silana. Scala 1 : 1.000.000.

piegato ma diviso in blocchi dislocati, variamente giustaposti e variamente inclinati: smembramento avvenuto sia per fratturazione, sia per slittamenti di masse dovuti alla mobilità del materiale argilloso. Ritengo che questo secondo sia il motivo principale.

Così, per esempio, presso il bordo settentrionale del bacino pliocenico le placche di strati arenacei su cui poggiano i paesi di Zinga e di Casabona non sono inclinate verso il Neto (a sud) come la stratificazione generale del bordo stesso, bensì in senso inverso. Il paese di Strongoli poi poggia su

una specie di amba a strati pianeggianti di un calcare conchigliare pieno di Molluschi (specialmente Pettini) e di Brachiopodi, il quale passa inferiormente a sabbioni e successivamente ad argille grigio-cerulee fossilifere. Nel vicino colle Le Murgie, sulle argille poggiano strati di sabbie e conglomerati pendenti verso il Neto.

A nord di questa zona pliocenica di placche sconnesse emergono, al bordo settentrionale del bacino, i terreni sottostanti con notevole regolarità: sono strati di argille con intercalati banchi di arenaria e di gesso; nella parte inferiore di questa formazione gessifera si trovano calcari e marne con zolfo, indi un orizzonte di tripoli, sotto al quale viene la formazione basale della locale serie neogenica, costituita da argille e talora conglomerati.

Lungo la striscia di affioramento della formazione gessifera, su questo bordo settentrionale, si trovano interessanti giacimenti di zolfo, che sono stati oggetto di sfruttamento con una serie di miniere disposte da est ad ovest, tra Strongoli e Verzino: Comero e Santa Maria in comune di Strongoli; Santa Domenica in comune di Melissa; Calcarella, Prato, Mangialardo e Promiscua in comune di San Nicola dell'Alto; Montepiano in comune di Casabuona; Fondo Lippi e Carmine in comune di Verzino. Tutte queste miniere sono pressochè allineate in direzione da est ad ovest e gli strati hanno inclinazione generale verso sud. Gli strati solfiferi si trovano al di sotto dei gessi. Lo zolfo si presenta in straterelli e in noduli entro una ganga di marna dura i cui strati, in numero da tre a sette, alternano con argille bituminose. Lo strato più profondo è generalmente il più ricco, con ganga di calcare compatto. Alla base si trovano i tripoli che segnano il limite inferiore della formazione gessoso-solfifera: i minatori sanno che al di sotto di essi è inutile cercare altro zolfo.

La miniera di gran lunga più importante del gruppo, e tuttora in produzione, è quella di Santa Domenica. Ne ho potuto visitare qualche tempo fa i lavori interni grazie alla cortesia dei concessionari. In essa gli strati hanno direzione est-ovest con inclinazione di 20° verso sud. Sopra ai tripoli basali si trova, con uno strato di calcare compatto (cagnino), il primo strato grande coltivato, chiamato « la Nave ». Al di sopra si trovano altri quattro strati di zolfo, alternati con le argille bituminose. Coprono la serie solfifera le argille con gessi.

Al di sotto dei tripoli si trova una formazione di argille di colore scuro o variegate, talora rossastre, spesso salifere. Queste argille inferiori, e ancor più quelle, molto simili, che si intercalano tra i gessi, sono spesso bituminose e anche ne provengono piccole quantità di idrocarburi liquidi o gassosi (goccioline di petrolio nelle argille e nei tripoli; gas chiamato « antimonio » dai minatori) che provocano talora incendi nelle gallerie delle miniere. Inoltre queste argille sono spesso salifere e, in orizzonti inferiori ai gessi, dànno luogo talora a saline.

Troviamo così anche in Calabria quella notevole associazione di gesso,

zolfo, sale e idrocarburi, che è comune a varie regioni d'Italia e sempre localizzata nei sedimenti depostisi verso la fine del periodo miocenico. Associazione che è molto significativa riguardo alla dibattuta questione della origine dello zolfo, poichè legata a speciali e costanti condizioni ambientali, e fa pensare, piuttosto che al fortuito incontro di elementi di diversa provenienza (quali l'arrivo di idrogeno solforato con sua ossidazione o l'ascesa di idrocarburi attraverso fratture fino ai depositi gessosi con riduzione dei solfati), a un'unità genetica: per esempio a un ambiente d'acqua marina con eccesso di salinità, con fondo denso e quieto, quindi privo di ossigeno, in cui la materia organica che si deposita, non venendo distrutta per ossidazione, dà luogo a formazione di idrocarburi, e in cui i solfati (forse per azione di batteri anaerobici) vengono in parte ridotti con deposizione di zolfo, anche prima del deporsi delle masse di gesso.

Questa formazione gessoso-solfifera si ritrova con caratteri costanti lungo gran parte dei margini dell'Appennino. Ma come successione stratigrafica è da tener presente che mentre i depositi gessoso-solfiferi delle Marche e della Romagna chiudono un lunghissimo periodo di sedimentazione continua marina (avanfossa dell'Appennino), quelli al bordo della regione cristallina silana, come quelli della Toscana (con la stessa serie in ambedue le regioni: conglomerato basale — marne e argille bituminose e salifere — eventuale zolfo — gessi e argille), rappresentano un'ingressione marina su una zona già emersa e fuori dei processi di piegamento.

La formazione argillosa inferiore affiora e si estende a nord della linea delle miniere di zolfo e comprende, nella parte basale, molasse e conglomerati che segnano il paesaggio squallido con linee più vive, con ripide pareti risaltanti, come nello sprone su cui sorge il paese di Melissa.

Dai pressi di Verzino dove la formazione gessoso-solfifera raggiunge il massimo spessore, l'affioramento (bordo del bacino di terreni pliocenici) gira ad angolo retto assumendo una direzione da nord a sud con pendenze verso est, e va assottigliandosi man mano che procede verso sud. La sottostante formazione delle argille salifere riposa direttamente, spesso con conglomerato basale, sulle rocce cristalline della Sila. Così tutta questa serie stratigrafica neogenica presenta una disposizione assai regolare, a parte la sconnessione dei blocchi di terreni pliocenici, ed è trasgressiva sopra gli antichi terreni cristallini.

È notevole tuttavia in questa regione la presenza di un altro complesso litologico: le argille scagliose. Esse costituiscono degli ampi dossi tondeggianti al bordo settentrionale del bacino pliocenico: la Serra San Basilio, la Serra del Petraro e la Serra Melissa; oltre ad altri affioramenti minori. Si tratta di argilloscisti variegati, con chiazze rossicce e con intercalazioni di strati arenacei e di strati calcarei: formazione fliscioide che è stata riferita all'Eocene, come altrove, per la presenza talora di Nummuliti e di Ortofragmine, ma che ulteriori studi potrebbero mostrare estendersi, come

altrove, sia al Cretaceo, sia all'Oligocene. Comunque è un materiale più antico della serie neogenica qui descritta e più recente del cristallino. Eppure esso, nella regione esaminata, non compare tra le due serie suddette; non si trova alla base della serie trasgressiva miocenica; anzi i conglomerati basali di quest'ultima neppure sembrano contenere elementi fliscioidi.

Abbiamo distinto sul bordo settentrionale del bacino del Neto tre zone di affioramenti: 1) — i sedimenti pliocenici che costituiscono il riempimento del bacino stesso; 2) — una fascia continua di formazione gessifera diretta est-ovest; 3) — i sedimenti inferiori costituiti da un'ampia zona di affioramento di argille salate e di conglomerati. Orbene, la posizione del materiale flisciode appare localizzata nella fascia dell'affioramento della formazione gessifera, tra l'area pliocenica del Neto e l'area miocenica a nord. Così nelle Serre San Basilio, del Petraro e Melissa a nord di Strongoli; così nella Serra di Mezzo a nord di Zinga.

Analogamente nella serie verticale, il materiale fliscioide « eocenico » costituisce la maggior parte dei ciottoli della formazione gessifera, mentre sembra mancare nei conglomerati inferiori e altresì in quelli del soprastante Pliocene. Inoltre, ripeto, i terreni miocenici del bordo silano riposano in generale direttamente sopra al cristallino.

Il materiale « eocenico » e l'affioramento delle argille scagliose si trovano dunque costantemente ed esclusivamente legati al livello della formazione gessifera: dai ciottoli dei conglomerati intercalati tra gli strati di gesso in varie località, ai blocchi angolosi nelle argille intercalate ai gessi di Serra di Mezzo, alle masse di argille scagliose localizzate nella striscia di affioramento della formazione gessifera della stessa Serra di Mezzo e delle Serre San Basilio, del Petraro e Melissa.

Questo materiale fliscioide (« eocenico »), talora frammentato e arrotondato, talora soltanto spezzato in detriti angolosi, talora addirittura in grandi masse conservando anche la parte argillosa (tipo argille scagliose), è dunque giunto nella zona durante la sedimentazione della serie gessifera: frana o colata di materiale fliscioide arrivata nel mare del Miocene superiore; fenomeno analogo a quello delle lenti di argille scagliose che ho messo in evidenza nell'Appennino romagnolo, intercalate nella formazione gessoso-solfifera della valle del Savio, e di cui ho là indicato la provenienza da regione più interna, più a sud-ovest [2]).

In questa regione della Calabria, donde proviene il materiale fliscioide?

A nord-ovest del Crati il *flysch* si estende dal Tirreno al Jonio. Più a sud può darsi che vi fosse del *flysch* anche sul massiccio cristallino, ma non risulta la presenza di residui. Sul cristallino si trovano (rilevamenti del Cortese e del Di Stefano: Foglio « Rossano » della Carta geologica

---

[2]) R. Signorini, *Sulla tettonica dell'Appennino romagnolo.* Rendiconti della Reale Accademia d'Italia. Roma, 1940.

d'Italia al 100.000 e Memorie descrittive della Carta geologica, IX°, del R. Ufficio Geologico d'Italia) lembi di vari altri terreni che segnano una serie di ingressioni e di erosioni, un alternarsi di immersioni e di emersioni. Tra Longobucco e Cropalati è notevole un lembo di terreni liassici (anageniti, arenarie, calcari). Trasgressivamente sia su questi sia direttamente sui terreni cristallini, sono lembi di un Eocene costituito da conglomerati di materiale del cristallino e da brecciole nummulitiche. Trasgressivamente su tutti i termini precedenti, appaiono lembi di arenarie mioceniche.

La presenza di elementi fliscioidi « eocenici » è indicata invece tra Cropalati e Cariati in piena zona dei terreni miocenici che si stendono con continuità al bordo nord-est del cristallino verso il mare Jonio. Questi terreni miocenici (arenarie, conglomerati, argille, gessi) appaiono trasgressivi direttamente sul cristallino. Le masse di argille scagliose appaiono esclusivamente nell'area della formazione delle « argille salifere e gessifere », spesso a diretto contatto con i gessi: cioè nelle stesse condizioni della zona presso Strongoli.

Non ho fatto studi nella zona di Cropalati, ma dai rilevamenti del Cortese ritengo probabile che si tratti del medesimo fatto e che l'interpretazione qui esposta vada estesa a tutta la formazione gessifera del bordo orientale della Calabria silana, dal golfo di Squillace al Crati.

La decomposizione della nitrammide.

Nota II del prof. **Ugo Beretta,** *presentata dal socio ord.* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 2 maggio 1942-XX)

Sunto. — Vengono esposti i risultati di nuove misure della velocità di decomposizione della nitrammide in soluzioni acquose di acido cloridrico diluito in presenza di cloruri dei metalli alcalini.

Per i cloruri di sodio e di potassio le misure, già eseguite alle temperature di 20° e di 30°C, sono state estese alla temperatura di 40°C e si sono completate con altre in presenza di cloruro di litio a 20° ed a 30°C.

Nei vari casi si è proceduto al calcolo delle costanti di velocità e delle energie di attivazione e, per la cosiddetta decomposizione spontanea in assenza di sali, anche a quello delle costanti che figurano nella formula di Arrhenius, applicando il metodo dei minimi quadrati.

Confermata l'azione depressiva dei sali sulla velocità di decomposizione, si deduce che l'ammontare della depressione dipende dalla natura dei cationi, i quali agiscono in misura crescente quando si passa dal litio al sodio e dal sodio al potassio.

La discussione di tutti i risultati, messi a confronto con quelli dei precedenti sperimentatori, porta a concludere che l'azione deprimente è da attribuire ad una sottrazione di molecole di acqua per idratazione degli ioni: seguendo tale ipotesi, si sono dedotti i valori medi per il numero di molecole di acqua di idratazione complessivamente impegnate dai tre sali.

In una precedente nota [1]) ci siamo occupati della decomposizione della nitrammide in soluzione acquosa ed abbiamo eseguito delle misure in presenza di acido cloridrico a concentrazioni variabili da 0,001 N fino a 0,1 N accertando che la velocità di decomposizione decresce lentamente al crescere della concentrazione dell'acido.

Misure eseguite da Marlies e La Mer [2]), che riguardano un campo più esteso di concentrazioni fino a 2 N, mostrano del pari una diminuzione iniziale della velocità, la quale raggiunge un valore minimo e comincia poi a crescere regolarmente.

Questi risultati si possono interpretare tenendo conto del fatto che la

---

[1]) Beretta U., *La decomposizione della nitrammide.* (Rend. R. Acc. Sc. fis. mat. della S. Reale (4ª), VIII, pp. 36-43; 1937).

[2]) Marlies C. A. and La Mer V. K., *The Catalytic decomposition of nitrammide in acid and salt solutions.* (Journ. Am. Chem. Soc., LVII, 1812-1820; 1935).

reazione di decomposizione è fortemente catalizzata dalla presenza degli ioni OH^-.

Le prime aggiunte di acido avrebbero quindi azione depressiva in quanto neutralizzerebbero gli idrossilioni, dopo di che si avrebbe a che fare con una catalisi per ioni idrogeno, anzi secondo Marlies e La Mer ci sarebbe addirittura una relazione lineare tra la velocità di decomposizione e la funzione di acidità, $H_0 = -\log a_{H^+} (f_B/f_{BH^+})$; dove a_{H^+} è l'attività degli ioni idrogeno ed f_B, f_{BH^+} sono i coefficienti di attività per la base presente [3]). Volendo studiare l'influenza dell'aggiunta di sali neutri con la certezza di avere eliminato qualunque intervento degli ioni OH^-, abbiamo sempre operato con soluzioni di HCl aventi la concentrazione 0,02 N ed in aggiunta concentrazioni variabili di NaCl e di KCl.

Le misure, eseguite alle temperature di 20° e di 30°C, sono state estese per NaCl dalla concentrazione 0,5 N a quella 5,4 N; mentre per le soluzioni di KCl sono state estese tra 0,5 N e 2 N.

Da queste misure abbiamo potuto dedurre che i sali neutri aggiunti esercitano un'azione depressiva; ma che questa azione riguarda essenzialmente il fattore cinetico della formula di Arrhenius mentre l'energia di attivazione rimane praticamente immutata.

Nella tabella VIII figurano i rapporti tra i valori delle costanti di velocità, che sono state misurate in presenza delle varie concentrazioni di sali alle temperature indicate, ed il valore della costante relativa alla decomposizione spontanea, che per noi corrisponde alla concentrazione 0,02 N di HCl.

Nella stessa tabella figurano anche i valori dei rapporti, che si deducono dalle esperienze di Marlies e La Mer, i quali hanno operato alla temperatura di 24°84C con soluzioni di NaCl (fino alla concentrazione 2,758 N) e di KCl (fino alla concentrazione 2,337 N) in presenza di HCl 0,01 N.

Marlies e La Mer calcolano il valore della costante di velocità per la decomposizione spontanea estrapolando, per $C = 0$, i valori misurati per diverse concentrazioni di HCl, trascurando quelli per i più piccoli valori di C, in corrispondenza dei quali si fa risentire l'influenza degli ioni OH^-.

I nostri valori coincidono con quelli che Marlies e La Mer hanno ottenuto per un numero più limitato di casi.

Secondo la teoria avanzata da Brönsted [4]) la costante di velocità di decomposizione in soluzione acquosa, in presenza di n basi, dovrebbe essere espressa dalla somma di $n+1$ termini:

$$k = k_0 + \Sigma k'_n C_n, \qquad (1)$$

---

[3]) Hammett L. P. and Deyrup A. J., *A series of simple basic indicators*. (Journ. Am. Chem. Soc., LIV, pp. 2721-2739; 1932). — Hammett L. P. and Martin A. P., *The zero point of the acidity functian scale*. (Ibid., LVI, pp. 827-9; 1934).

[4]) Brönsted J. N., *The theory of acid and bazic catalysis*. (Trans. Far. Soc., XXIV, pp. 630-640; 1928).

dove k_0 indica il coefficiente di velocità della decomposizione spontanea e le k'_n indicano quelli che potrebbero essere definiti come coefficienti molecolari di velocità di una reazione catalizzata dalla base n, presente alla concentrazione C_n.

Se la velocità di decomposizione spontanea si interpreta come dovuta ad una reazione catalizzata dall'acqua, che deve essere considerata anche essa come una base secondo le vedute di Brönsted, e se si indica con C_0 la concentrazione dell'acqua presente, si può scrivere

$$k = k'_0 C_0 + \Sigma k'_n C_n . \qquad (2)$$

In base a questa formula è da prevedere, nelle soluzioni concentrate di sali neutri, una diminuzione di velocità in quanto diminuisce la concentrazione molecolare dell'acqua. Servendoci dei più recenti dati disponibili sulla densità di soluzioni acquose (*International Critical Tables*, vol. III) abbiamo calcolato i rapporti tra la concentrazione molecolare dell'acqua nelle soluzioni che ci interessano e la concentrazione (55,55) nell'acqua pura a 20°: tali rapporti figurano nella Tabella I, dove C_s indica la concentrazione dell'elettrolita disciolto.

Tabella I.

Valori di $\frac{C_0}{55{,}55}$ a 20°.

C_s	HCl	LiCl	NaCl	KCl
0,5	0,989	0,994	0,989	0,984
1,0	0,979	0,989	0,982	0,970
2,0	0,960	0,960	0,960	0,960
5,4	—	—	0,886	—

I valori relativi all'acido cloridrico sono più bassi di quelli che competono ai corrispondenti rapporti delle costanti di velocità e dimostrano quindi che deve qui intervenire un'azione catalitica. Viceversa i valori relativi ai cloruri sono tutti più alti di quelli che competono ai corrispondenti rapporti delle costanti di velocità, registrati nella tabella VIII; di talchè si è indotti a pensare che la concentrazione effettiva dell'acqua è ancora più bassa in conseguenza del fatto che un certo numero di molecole viene a trovarsi impegnato por la idratazione degli joni.

A questo punto conviene di ricordare che, secondo le esperienze di

Brönsted, confermate anche dalle successive misure di Baughan e Bell [5]), i coefficienti k'_n sono legati alle costanti K_n di dissociazione delle basi catalizzatrici, da una relazione del tipo:

$$k'_n = G K^{\alpha}, \qquad (3)$$

dove α è di poco inferiore all'unità.

Questa legge di dipendenza, malgrado i tentativi di interpretazione di Brönsted [6]), deve tuttora ritenersi di carattere puramente empirico, pur dovendo ad essa attribuirsi un notevole valore per le numerose conferme numeriche che ha ricevuto.

In occasione delle citate misure, Marlies e La Mer hanno cercato di esprimere le loro costanti di velocità con una relazione lineare del tipo:

$$k = k'_0 C_w + k'_s C_s, \qquad (4)$$

dove C_w rappresenterebbe la concentrazione molecolare effettiva dell'acqua nelle soluzioni ove l'acido o il sale si trovino rispettivamente alle concentrazioni C_s.

Nel caso delle soluzioni di HCl la correzione è fatta tenendo anche conto della molecola di acqua assorbita dallo jone H_3O^+, e cioè ponendo $C_w = C_0 - C_s$; ma malgrado ciò si trova che la relazione lineare espressa dalla (4) non vale per tutto l'intervallo di concentrazioni sperimentalmente esplorato. Essa si verifica abbastanza bene soltanto fino alle concentrazioni 0,4 N; N e 0,8 N rispettivamente per HCl, NaCl e KCl.

Al disopra di tali concentrazioni la variazione di k è minore di quello che indicherebbe la suesposta legge lineare.

Ora ci sembra acconcio qui di osservare che tutte le misure eseguite, sia da Brönsted e collaboratori sia da Baughan e Bell, si estendono a piccoli intervalli delle concentrazioni delle basi aggiunte; di talchè non è facile dire se effettivamente debba ritenersi valida una proporzionalità diretta rispetto alle C_n o se nella formula le concentrazioni debbono essere introdotte con un esponente minore dell'unità, come quello che figura nella precedente formula (3) quale esponente delle costanti di dissociazione delle basi.

Nel tentare questa via, lasciamo sempre impregiudicato il problema dell'interpretazione da dare a questa legge di dipendenza; ma vogliamo soltanto osservare che anche la proporzionalità diretta riscontrata da Mar-

---

[5]) Baughan E. C. and Bell R. P., *Temperature coefficients in the anion catalysed decomposition of nitrammide.* (Proc. R. Soc., London, CLVIII, 464-478; 1937).

[6]) Veggasi, tra l'altro, la discussione generale sulla catalisi omogenea svoltasi nel 1928 a Cambridge per iniziativa della Faraday Society. (Trans., XXIV, pp. 721-85; 1928).

LIES e LA MER tra costante di velocità e funzione di acidità, per quanto suggestiva, non può ritenersi convincente. Infatti nei fenomeni cinetici non si vede ragione di introdurre l'attività al posto delle concentrazioni, come del resto BJERRUM ha già fatto osservare in una discussione sull'argomento [7]).

Aggiungiamo inoltre che, per la decomposizione spontanea della nitrammide, il logaritmo decimale del fattore cinetico della formula di ARRHENIUS, si mantiene intorno a 12, che è il valore più probabile per le reazioni bimolecolari in soluzione [8]). Ciò porta a ritenere che la reazione di decomposizione è conseguenza dell'urto della molecola di nitrammide con una molecola della base acqua, così come nella catalisi per joni H_3O^+ essa è conseguenza di urto tra questo ed una molecola di nitrammide. E la frequenza d'urto è proporzionale alle concentrazioni, non alla attività.

Partendo da queste considerazioni abbiamo voluto verificare se le costanti di velocità, misurate da MARLIES e LA MER in presenza di HCl, potevano essere espresse da una formula del tipo

$$k = k'_w \, C_w^{\beta} + k'_s \, C_s^{\gamma} \qquad (5)$$

ed abbiamo infatti trovato che si hanno risultati molto concordanti ponendo $\beta = 0{,}85$ e $\gamma = 0{,}84$.

Si noti che, per molte basi, BRÖNSTED trova che la formula (3) esprime bene i risultati ponendo $\alpha = 0{,}83$ [9]).

La formula (5) diventa

$$10^5.k = 4{,}062 \; C_w^{0{,}85} + 31{,}94 \; C_s^{0{,}84}. \qquad (6)$$

Nella seguente tabella II sono messi a confronto i valori osservati con quelli calcolati secondo la formula (6), per mostrare come essa permetta di rappresentare bene i risultati dell'esperienza.

TABELLA II.

C_s	C_0	C_w	$k \cdot 10^5$ calc.	$k \cdot 10^5$ oss.
0,5	54,93	54,43	139,2	139,1
1,0	54,38	53,38	151,3	151,0
2,0	53,33	51,33	172,7	173,0

[7]) BJERRUM N., *Zur theorie der chemischen Reoktionsgeschwindigkeit.* (Z. phys. Ch., CVIII, pp. 82-100; 1924).

[8]) MOELWYN-HUGHES E. A., *The kinetics of reactions in solution.* (Clarendon Press, Oxford, 1933). Cap. IV. Bimolecular reactions, p. 82.

[9]) BRÖNSTED J. N. und PEDERSEN K. J., *Die katalytische Zersetzung des Nitramids und ihre physikalische-chemische Bedeutung.* (Z. phys. Ch., CVIII, 185-235; 1924).

Fissato questo punto restava da approfondire lo studio della influenza esercitata dal catione del sale aggiunto, in quanto dalle nostre precedenti esperienze l'azione depressiva del cloruro di potassio era risultata, a parità di concentrazione, maggiore di quella esercitata dal sale di sodio.

Appariva quindi la necessità di estendere lo studio ad altri sali alcalini ed abbiamo perciò prescelto il cloruro di litio, trovando che il suo comportamento si inquadra molto bene giacchè esso esercita un'azione depressiva minore di quella dovuta al cloruro di sodio.

Risultati sperimentali.

Le misure della velocità di decomposizione sono state eseguite adoperando la stessa tecnica sperimentale ed utilizzando sempre soluzioni 0,02 N di HCl, alle quali si aggiungevano eventualmente i cloruri alle concentrazioni 0,5 — 1,0 — 2,0 N. La nitrammide è stata preparata e purificata con la solita tecnica [10]).

In primo luogo abbiamo eseguito una serie di misure alla temperatura di 40°C, alla quale abbiamo accertata — come media di numerose determinazioni concordanti — una costante della velocità di decomposizione spontanea di $701 . 10^{-5}$. Questo valore è sensibilmente più alto di quello ($662 . 10^{-5}$) che si calcolerebbe in base alla formula dedotta dalle nostre precedenti esperienze, e cioè:

$$\log_{10} k_0 = 12{,}13231 - 4.482{,}34 \frac{1}{T} . \qquad (7)$$

Ritorneremo su questo punto in sede di discussione dei risultati sperimentali, qui basterà accennare che tutte le prove eseguite per controllare la purezza dell'acqua e dei reattivi ci hanno sempre portato allo stesso valore.

In presenza dei cloruri di sodio e di potassio si sono avuti i valori delle costanti di velocità che figurano nella tabella III: alla temperatura di 40° non si sono eseguite misure con il cloruro di litio.

Tabella III

Valori di $k \cdot 10^5$

C_S	0,5	1,0	2,0
NaCl	648	560	481
KCl	629	541	433

[10]) Beretta U., loc. cit. alla nota [1]).

Con questo sale abbiamo eseguito soltanto misure a 20° ed a 30°C sempre in presenza di HCl 0,02 N e con le solite concentrazioni C_S fino a 2 N. I valori medi delle costanti di velocità, dedotti da numerose determinazioni concordanti, figurano nella tabella IV, dove — sotto la colonna $C_S = 0$ — figurano nuovi valori della costante di decomposizione spontanea, che abbiamo rideterminata come media di ripetute misure al fine di accertare se in questa seconda serie di esperienze si fosse per caso introdotta una causa sistematica di errore, capace di maggiorare le velocità, come si poteva sospettare in base ai risultati delle misure eseguite a 40°C e di cui abbiamo testè parlato.

TABELLA IV

Valori di $k_0 \cdot 10^5$ per LiCl

t \ C_S	0	0,5	1,0	2,0
20°	69,8	66,7	79,0	54,6
30°	225,5	212,8	189,0	174,0

Poichè, nella precedente serie di misure, avevamo trovato a 20° $k_0 = 70{,}7 \cdot 10^{-5}$ ed a 30° $k_0 = 225{,}9 \cdot 10^{-5}$; si deduce che la nuova serie di misure, eseguite con nuovi prodotti ed a così grande distanza di tempo, porta a risultati che concordano in modo notevole con quelli precedenti.

Piuttosto è da ritenere che la formula numerica (7), valevole per la interpolazione dei nostri primi risultati sperimentali, mal si presti ad eseguire la estrapolazione per la temperatura di 40°C, come discuteremo meglio in seguito.

Discussione dei risultati.

Nelle nostre precedenti ricerche, partendo dai valori delle costanti di velocità misurate per le temperature di 20°, 25° e 30°C, avevamo calcolato col metodo dei minimi quadrati le costanti della formula di ARRHENIUS, giungendo alla equazione (7), la quale rappresentava molto bene i risultati sperimentali nostri e di altri sperimentatori, ivi compresi quelli di BAUGHAN e BELL per la temperatura di 45°C. Ha destato perciò gravi preoccupazioni il risultato delle nostre nuove misure a 40°, le quali davano in media $k = 701 \cdot 10^{-5}$ contro un valore calcolato di $662 \cdot 10^{-5}$ in base alla formula (7).

Dobbiamo però osservare che le misure di B. e B. per la decomposizione spentanea sono state eseguite in presenza di HCl 0,057 N e 0,0057 N; di $HClO_4$ 0,0136 N e di $C_6H_4SO_3H$ 0,05 N e qualche volta a concentrazioni poco

diverse. Gli AA., in base alla primitiva opinione di Brönsted secondo cui era da escludere una azione catalitica per joni idrogeno, hanno sempre valutato k_0 come media dei quattro valori trovati, senza preoccuparsi del fatto che essi differiscono sensibilmente l'uno dall'altro per una stessa temperatura: a 15° i due valori estremi differiscono addirittura del 12%, mentre in altri casi le differenze non raggiungono l' 1%. Il che ci sembra stia a dimostrare una precisione nelle misure, di certo inferiore a quella raggiunta da noi e confermata con la grande riproducibilità dei risultati, anche a notevole distanza di tempo. Abbiamo perciò creduto opportuno di ricalcolare sempre col metodo dei minimi quadrati le costanti della formula di Arrhenius, introducendo nel calcolo tutti i nostri valori delle vecchie e delle nuove misure effettuate a 20°, 25°. 30° e 40°C. Abbiamo posto $T = 273°2 + t$; ed abbiamo ottenuto la formula:

$$\log_{10} k_0 = 12{,}47628 - 4.584 \frac{1}{T} . \qquad (8)$$

Nella tabella V i valori, calcolati con le due formole (7) e (8), sono posti a confronto con quelli sperimentali nostri e di altri sperimentatori. Aggiungiamo che il valore della costante di Brönsted e Pedersen è quello medio riportato nella citata memoria del 1924; il valore di Marlies e La Mer è quello relativo alla temperatura 24°84C, ed è valutato estrapolando fino a $C_S = 0$ i valori ottenuti alle diverse concentrazioni di HCl; ma senza tener conto dei risultati corrispondenti alle concentrazioni più basse, dove interviene l'azione degli joni OH^-. Dalle misure di Baughan e Bell abbiamo tratto la media dei valori corrispondenti alle due concentrazioni 0,057 N e 0,0057 N di HCl; valore medio che ci è sembrato meglio paragonabile con i risultati delle nostre misure eseguite con HCl 0,02 N.

La formula (8) si può scrivere

$$k_0 = 2{,}99 \cdot 10^{13} \, e^{-\frac{20.974}{RT}} \qquad (9)$$

quando si ponga $R = 1{,}9869$. L'energia di attivazione risulta ora eguale a 20,974 ed il fattore cinetico, a $2{,}99 \cdot 10^{13}$.

Per passare al coefficiente molecolare k'_0, occorre evidentemente dividere per 55,55 e quindi il fattore cinetico diventa $5{,}38 \cdot 10^{10}$, approssimandosi molto al valore della frequenza di urto teoricamente prevedibile, come avviene nel maggior numero di casi conosciuti di reazioni bimolecolari [11]).

---

[11]) Moelwyn-Hughes E. A., loc. cit. alla nota [6]).

TABELLA V

Valori di $k_0 \cdot 10^4$

t		15°	[20°,5]	25°	30°	35°	40°	45°
calcolati	secondo (7)	38,0	70,0	126,2	223,3	387,9	662,0	1,111
	secondo (8)	37,1	69,6	126,7	227,2	399,6	690,5	1,173
trovati	Baughan e Bell	38,2	—	122,7	—	386,5	—	1,106
	Brönsted e Pedersen	38,3	—	—	—	—	—	—
	Marlies e La Mer	—	—	123,5	—	—	—	—
	Beretta I	—	70,7	122,9	225,9	—	701,1	—
	Beretta II	—	69,8	—	225,5	—	—	—

Passiamo ora ad esaminare l'influenza esercitata dai sali neutri e cominciamo dal considerare quello che avviene della energia di attivazione. Già nel nostro precedente lavoro avevamo fatto osservare che, in presenza di NaCl e di KCl, l'energia di attivazione (calcolata tra 20° e 30°C) risultava di poco inferiore a quella della reazione spontanea e che quindi l'azione depressiva si esercitava essenzialmente sul fattore cinetico. Aggiungendo, ai valori di k precedentemente rilevati, quelli delle nuove misure a 40° raccolti nella tabella III; si sono potuti calcolare col metodo dei minimi quadrati i coefficienti numerici delle formule di ARRHENIUS valide per i sei diversi mezzi salini utilizzati nelle esperienze. Tali formule sono:

per NaCl

0,5 N $\quad \log_{10} k = 12{,}28333 - 4.535 \frac{1}{T}$

1,0 N $\quad \log_{10} k = 12{,}13844 - 4.509 \frac{1}{T}$

2,0 N $\quad \log_{10} k = 12{,}05039 - 4.502 \frac{1}{T}$

per KCl

0,5 N $\quad \log_{10} k = 12{,}34292 - 4.557 \frac{1}{T}$

1,0 N $\quad \log_{10} k = 12{,}31337 - 4.569 \frac{1}{T}$

2,0 N $\quad \log_{10} k = 12{,}25058 - 4.579 \frac{1}{T}$.

La tabella VI pone a confronto i valori di k, calcolati a mezzo delle precedenti formule, con quelli dedotti dalle esperienze; mostrando che si raggiunge nel calcolo l'approssimazione del 2% circa.

TABELLA VI

Valori di $k \cdot 10^5$

t \ Cs	0,5		1,0		2,0	
	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.
			NaCl			
20°	65,6	66,1	57,5	57,9	49,4	49,9
30°	212,0	208,0	185,0	181,0	159,0	154,0
40°	638,0	648,0	552,0	560,0	472,0	481,0
			KCl			
20°	63,0	63,5	53,6	54,1	42,8	43,2
30°	205,0	200,0	175,0	170,0	140,0	137,0
40°	619,0	629,0	530,0	541,0	426,0	433,0

Nella tabella VII si trovano invece, per i sei mezzi salini sperimentati, i valori del fattore cinetico A e della energia di attivazione E. Per quanto riguarda quest'ultima grandezza si va da un massimo di 20.951 ad un minimo di 20.599 cal., con un divario del 2% il quale rientra nei limiti di errore corrispondenti ad una approssimazione dell'1% nella misura delle costanti di velocità. Si deve pertanto concludere che l'azione depressiva dei sali aggiunti non ha influenza sul meccanismo di attivazione, ma si limita ad influenzare il fattore cinetico.

TABELLA VII

	Cs	$A \cdot 10^{-12}$	E
NaCl	0,5	1,92	20.747
	1,0	1,37	20.629
	2,0	1,12	20.599
KCl	0,5	2,20	20.850
	1,0	2,06	20.905
	2,0	1,78	20.951

Per il gruppo di esperienze sul cloruro di litio, avvalendosi dei dati della tabella IV, si calcola per l'energia di attivazione della reazione di decomposizione spontanea: $E = 20.711$; $A = 1{,}92 \cdot 10^{13}$. Dalle tre coppie di valori relativi alle soluzioni saline si ha:

$C_S = 0{,}0$	$E = 20{\cdot}498$	$A = 1{,}25 \cdot 10^{13}$
1,0	20.292	$0{,}81 \cdot 10^{13}$
2,0	20.470	$1{,}00 \cdot 10^{13}$.

Ed anche qui il divario tra il massimo ed il minimo valore di E resta dell'ordine del 2 %.

Queste oscillazioni del valore di E — pur rimanendo nei limiti dell'approssimazione raggiungibile — esercitano la loro influenza sul valore del coefficiente cinetico A che si viene a calcolare. L'influenza è più sensibile nel caso del cloruro di litio, per il quale — disponendo il minor numero di misure — viene a mancare l'azione regolatrice delle medie. Il fattore A diminuisce al crescere di C_S, come avviene per le costanti k, ma qui si nota un minimo in corrisponpenza della concentrazione normale, il che è da mettere in rapporto con il valore minimo di E, che contemporaneamente si registra.

Tale anomalia non si verifica per gli altri due cloruri, per i quali la serie delle misure è più completa.

Volendo eseguire un confronto sull'azione depressiva dei vari sali, viene fatto di domandarsi se si debba ammettere rigorosamente valida la costanza dei valori di E e quindi procedere nel ragionamento riferendoci soltanto al confronto tra i valori delle costanti di velocità, oppure se si debba riferirsi ai fattori cinetici delle formule di Arrhenius così come essi risultano dal calcolo.

L'andamento delle costanti di velocità, direttamente dedotte dall'esperienza, è abbastanza regolare come risulta dai dati raccolti nella tabella VIII, dove figurano i rapporti tra le k misurate nelle diverse soluzioni saline ed i valori di k_0 alle temperature corrispondenti. Nella tabella sono anche riportati i valori di Marlies e La Mer per HCl, NaCl e KCl alla temperatura di 24°84. Buono è l'accordo tra le nostre misure e quelle di questi sperimentatori.

Risulta dai valori registrati che l'HCl ha un'azione catalizzatrice, mentre i sali hanno un'azione depressiva la quale dipende dalla natura del catione essendo minima l'azione del cloruro di litio e massima quella del cloruro di potassio.

Paragonando i valori delle riduzioni relative delle costanti di velocità con quelli delle riduzioni relative della concentrazione dell'acqua, riportate nella tabella I, si giunge alla interpretazione, che avevamo già anticipata nelle premesse, e secondo la quale si deve ammettere che la concentrazione

effettiva delle molecole di acqua libera è ancora minore di quella che si calcola dai dati densimetrici, in conseguenza del fatto che una parte delle molecole è impegnata per la idratazione degli joni.

TABELLA VIII

Valori di $\frac{k}{k_0}$

t \ Cs	0,5	1,0	2,0	5,4
		HCl		
24°84	1,13	1,22	1,40	—
		LiCl		
20°	0,94	0,85	0,77	—
30°	0,94	0,84	0,77	—
		NaCl		
20°	0,93	0,82	0,71	0,26
24°84	0,91	0,81	0,65	—
30°	0,92	0,80	0,68	0,27
40°	0,92	0,80	0,69	—
		KCl		
20°	0,90	0,76	0,61	—
24°84	0,89	0,78	0,61	—
30°	0,89	0,75	0,60	—
40°	0,90	0,77	0,62	—

Secondo un tal modo di vedere, l'azione depressiva per una serie di cloruri dovrebbe crescere al crescere del grado di idratazione medio del catione e quindi l'andamento dei rapporti $\frac{k}{k_0}$ starebbe ad indicare che questo grado di idratazione cresce nel passaggio dal litio al potassio, cioè al crescere del raggio jonico.

Per uno stesso mezzo salino i rapporti $\frac{k}{k_0}$ non variano in modo sensibile al variare della temperatura e ciò starebbe ad indicare che — entro i limiti da noi esplorati $20° \leq t \leq 40°$ — la temperatura influisce molto poco sul grado medio di idratazione degli joni.

Se si prendono invece in esame i coefficienti cinetici A, si trova che

la riduzione relativa è più forte per il sodio anzicchè non per il potassio: non sono attendibili deduzioni per il litio data l'incompletezza delle misure.

In altri termini, si metterebbe quì in evidenza un andamento del grado medio di idratazione che decresce al crescere del raggio jonico del catione. Il fatto merita di essere sottolineato per dimostrare quanta cautela occorra in questi ragionamenti, nei quali non va mai perduto di vista il grado di approssimazione raggiungibile nelle misure.

Purtroppo non soccorrono quì i dati che si possono trarre dalle misure dei numeri di trasporto in quanto è molto dubbio il meccanismo attraverso cui la migrazione degli joni provoca anche uno spostamento di acqua, non essendo da escludere che ciò avvenga anche per la diversa quantità di moto che gli joni migranti in senso opposto comunicano per urto alle molecole di acqua [12]), e non soltanto per trasporto di acqua per idratazione legata agli joni migranti.

Tuttavia i risultati delle misure dei numeri di trasporto, interpretati nel senso classico [13]), e quelli sulla esistenza degli idrati dei cloruri allo stato solido si accorderebbero nel far ritenere che la idratabilità cresce, nei metalli alcalini, al diminuire del raggio jonico. Per decidere la questione occorrerebbero quindi misure più precise e più copiose.

Ci limiteremo per il momento a considerare soltanto le costanti di velocità bastandoci di dimostrare, ai fini di questo studio — il quale serve essenzialmente ad interpretare il meccanismo della azione depressiva — che la interpretazione proposta conduce a calcolare dei valori del grado di idratazione coincidenti, nell'ordine di grandezza, con quelli determinati per altra via.

L'influenza, che la reazione da noi studiata risente per effetto della sottrazione di acqua impegnata nella idratazione degli joni, si può calcolare nel seguente modo.

Indichiamo con C_0 la concentrazione molecolare dell'acqua nella soluzione che si considera e con k'_0 la costante molecolare di velocità della reazione catalizzata dall'acqua; siano poi m e p il numero delle molecole di acqua mediamente legate allo anione ed al catione dell'elettrolita aggiunto, che supporremo completamente dissociato; e siano infine rispettivamente k'_a e k'_c le costanti molecolari di velocità delle reazioni catalizzate dall'anione e dal catione. Dovremo scrivere:

$$k = k'_0 [C_0 - (m + p) C_s]^\beta + (k'_a + k'_c) C_S^\beta \qquad (10)$$

---

[12]) Lindmann F. A., *Note on the temperature coefficient of the mobilites of ions in liquids.* (Z. phys. Chem., CX. pp. 394-8; 1924).

[13]) Kraus C. A., *The properties of electrically conducting systems.* (The Chemical Catalog Cy, New York, 1922). Cap. VIII, Nature of Carriers in electrolytic solutions, p. 198.

dove per semplicità, al posto degli esponenti sensibilmente eguali, si ammette un unico esponente $\beta = 0{,}85$. L'ipotesi è abbastanza bene verificata in base a quanto abbiamo visto in precedenza e valida specialmente per l'applicazione che in questa sede sarà fatta della formula.

In prima approssimazione, per β poco diverso dell'unità, si può anche porre:

$$k = k'_0 C_0^{\beta} + [k'_a + k'_c - (m+p) k'_0] C_S^{\beta} \qquad (11)$$

e, per confronto con la (4), si ha:

$$k'_S = k'_a + k'_c - (m+p) k'_0 .$$

Nel caso dell'acido cloridrico, avendo già tenuto conto delle molecole di acqua impegnate dagli joni idrogeno, si può scrivere:

$$k'_S = k'_a + k'_c - m k'_0 . \qquad (12)$$

Circa le costanti molecolari di velocità relative agli anioni, si sa che esse sono inversamente proporzionali alle costanti di dissociazione degli acidi corrispondenti; e quindi, con ogni probabilità, nel caso di acidi forti completamente dissociati, k'_a è nulla o quasi.

Resta l'incertezza relativa al valore di m, a proposito del quale si può, in base ad alcune considerazioni che saranno svolte in seguito, accettare come ordine di grandezza il valore di 5.

La formula (12) diventa:

$$k'_S = k'_c - 5 k'_0$$

e quindi

$$k'_c = k'_S + 5 k'_0 .$$

Sostituendo a k'_S ed a k'_0 i loro valori che già figurano nella (6), si ottiene $k'_c = 53 \cdot 10^{-5}$, cioè un valore più che decuplo di k'_0. Sono in corso misure della velocità di decomposizione della nitrammide in presenza di HCl a varie temperature per studiare se in questo caso, come tutto lascia prevedere, si ha un più basso valore dell'energia di attivazione.

Per i cloruri alcalini, dobbiamo ritenere di valore nullo o quasi entrambe le costanti k'_a e k'_c e quindi la (11) diventa:

$$k = k'_0 [C_0 - (m+p) C_S]^{0,85}$$

e, ponendo $m + p = s$,

$$\frac{k}{k'_0 C_0^{0,55}} = \left(1 - s\frac{C_S}{C_0}\right)^{0,55} \qquad (13)$$

da cui si possono dedurre i valori di s.

Sostituendo nella (12) i valori di k, misurati a 20° per i tre sali alle varie concentrazioni, e ponendo $k'_0 = 4{,}062$; si hanno i valori di s arrotondati, che figurano nella tabella IX.

TABELLA IX

Valori di s

C_S	0,5	1,0	2,0	5,4
LiCl	7	9	6	—
NaCl	7	11	8	7
KCl	11	13	10	—

Le misure di trasporto per il KCl conducono a valutare [14]), ammettendo una eguale idratazione dei due joni, un valore di s molto prossimo a 10 e quindi coincidente col nostro come ordine di grandezza.

E' lecito quindi di porre $m \cong 5$, come abbiamo precedentemente fatto.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze, e nei limiti di approssimazione consentiti dalle misure, appare legittimo di concludere: 1° che con grande probabilità l'azione depressiva dei sali neutri è dovuta alla sottrazione di molecole di acqua da parte degli joni e, 2°) che il meccanismo di reazione non è diverso da quello riscontrato per la cosiddetta decomposizione spontanea dove le molecole di nitrammide si attivano per urto con le molecole di acqua, funzionanti come basi secondo la concezione di Brönsted.

Napoli, luglio 1942 - XX — Istituto Chimico della R. Università

---

[14]) Loc. cit. alla nota [13]) p. 201. Interpolando i dati risulta, con i nostri simboli, $p = 5{,}5$ per $m = 5$, quando è anche approssimativamente monoidrato l'jone idrogeno.

Instabilità nell'equilibrio d'una volta-trave.

Nota del prof. **Adriano Galli**, *presentata dal socio ordinario* **C. L. Ricci**

Adunanza del dì 7 marzo 1942 - XX)

Sunto. — Si determina il valore critico del peso proprio g_c di una volta-trave autoportante applicando il metodo energetico, sullo spirito del teorema di Dirichlet, facendo intervenire nella espressione della energia totale i termini d'ordine superiore negli spostamenti. Si perviene ad una formula approssimata del carico critico e la si applica ad un esempio concreto.

L'importanza che, nelle applicazioni della tecnica costruttiva, specialmente intesa con riferimento alle moderne forme architettoniche ed alle sempre maggiori esigenze di superfici libere da impedimenti (pilastri, tiranti, irrigidimenti, ecc.), spetta alle volte cilindriche (volte Zeiss) giustifica la ricerca di quelle sollecitazioni critiche alle quali corrispondono configurazioni instabili e cioè tali da subire, al più lieve cimento, sia statico che dinamico, perturbamenti tanto profondi da provocare la rottura del sistema cimentato.

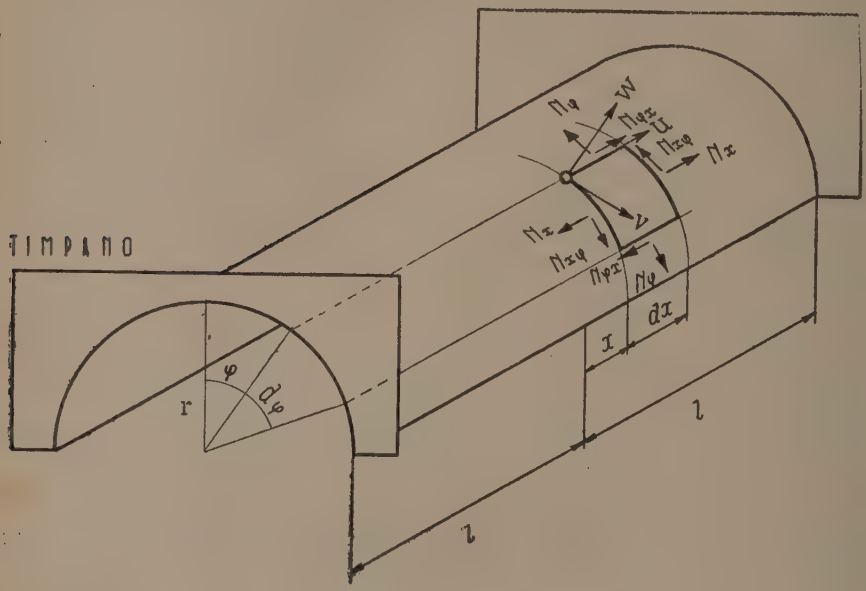
Indichiamo con XYZ le componenti della sollecitazione esterna valutate per unità di superficie prese con riferimento alla terna trirettangola xyz di cui z coincide con la normale alla volta, x con la generatrice ed y con la tangente alla direttrice; u, v, w siano le componenti dello spostamento: u positivo nella direzione secondo la quale x cresce, v lo spostamento nel verso secondo il quale φ cresce, w lo spostamento lungo la normale, positivo verso l'esterno. Se si prescinde dalla resistenza a flessione dell'elemento di volta le tensioni normali (N_x ed N_φ) e di taglio ($N_{x\varphi}$) si distribuiscono uniformemente sulle facce dell'elemento.

Stabilito inoltre che la volta si imposti agli estremi in timpani rigidi semplicemente appoggiati, e cioè atti ad assorbire soltanto sforzi agenti nel loro piano, negli estremi $x = \pm l$ dovrà essere $u = v = N_x = 0$. Supponiamo, per ora, che la curvatura della volta sia costante, cioè che la sezione trasversale sia una semi corona circolare.

Per strutture del genere di quella in esame le sollecitazioni preponderanti sono quelle che derivano dal peso proprio g della struttura: ci proponiamo quindi di determinare il più piccolo dei valori g_c di g che conduce ai margini della instabilità.

Tale ricerca può eseguirsi determinando quell'ulteriore spostamento,

di componenti δu, δv, δw da attribuire ai punti della superficie media della membrana già deformata sotto l'azione di g_c, tale che la volta, dopo lo spostamento stesso, sia in equilibrio sotto lo stesso carico. La determinazione di g_c coincide con quella del più piccolo degli autovalori di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.



L'effettiva ricerca del detto sistema non presenta notevoli difficoltà, ma non altrettanto accessibile appare la risoluzione del sistema, così che una pratica risoluzione del problema è più agevolmente perseguibile attraverso considerazioni energetiche, nello spirito del teorema di DIRICHLET. A partire dalla configurazione, che supponiamo di equilibrio, assunta dalla volta sotto l'azione del carico g_c, imprimiamo alla superficie media della volta uno spostamento, compatibile con le condizioni di contorno, di componenti δu, δv, δw. Tenendo conto della resistenza a flessione della volta, valutiamo la variazione dell'energia totale $E = V - L$ del sistema, definita come differenza fra la variazione dell'energia elastica di deformazione ed il lavoro che, per la data deformazione, compiono i carichi applicati.

La configurazione di equilibrio di partenza sia caratterizzata dalle componenti di deformazione:

$$\bar{\varepsilon}_x,\ \bar{\varepsilon}_\varphi,\ \bar{\gamma}_{x\varphi},\ \chi_x,\ \chi_\varphi,\ \chi_{x\varphi}$$

($\bar{\varepsilon}_x$ ed $\bar{\varepsilon}_\varphi$ coefficienti di dilatazione lineare secondo la generatrice e secondo la tangente $\bar{\gamma}_{x\varphi}$ scorrimento mutuo delle due stesse direzioni, χ_x, χ_y, $\chi_{x\varphi}$

curvature per flessione e torsione). La configurazione, dopo lo spostamento impresso sarà caratterizzata dalle componenti di deformazione:

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x + \delta^1 \bar{\varepsilon}_x + \delta^2 \bar{\varepsilon}_x$$
$$\varepsilon_\varphi = \bar{\varepsilon}_\varphi + \delta^1 \bar{\varepsilon}_\varphi + \delta^2 \bar{\varepsilon}_\varphi$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

in cui $\delta^1\bar{\varepsilon}_x, \delta^1\bar{\varepsilon}_\varphi \ldots$ debbono intendersi grandezze infinitesime del 1.° ordine nelle componenti dello spostamento; $\delta^2\bar{\varepsilon}_x, \delta^2\bar{\varepsilon}_\varphi, \ldots$ infinitesime del 2.° ordine negli stessi spostamenti, non trascurabili in problemi di stabilità.

Poichè la configurazione di partenza è di equilibrio, il lavoro delle forze esterne è, per la deformazione compatibile e piccolissima assegnata, eguale alla variazione prima dell'energia potenziale elastica W, risulta cioè:

$$\delta^1 E = \int_S W(\bar{\varepsilon}\delta^1\bar{\varepsilon})\, dS - \int_S (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS = 0.$$

Occorre, per la stabilità dell'equilibrio, che $\delta^2 E > 0$ occorre, cioè, che:

$$\delta^2 E = \int_S W(\delta^1\bar{\varepsilon}\,\delta^1\bar{\varepsilon})\, dS + \int_S (N_x\delta^2\bar{\varepsilon}_x + N_\varphi\delta^2\bar{\varepsilon}_\varphi + N_{x\varphi}\delta^2\bar{\varepsilon}_{x\varphi})\, dS > 0.$$

I limiti dell'equilibrio elastico sono quindi segnati dalla:

$$\delta^2 E = 0. \qquad (1)$$

Poichè le caratteristiche della sollecitazione sono proporzionali a g_c, quel valore di g_c che conduce alle soglie della stabilità è fornito dalla:

$$\int_S W(\delta^1\bar{\varepsilon}, \delta^1\bar{\varepsilon})\, dS + g_c \int_S (N'_x\delta^2\bar{\varepsilon}_x + \ldots)\, dS = 0$$

in cui $N'_x, \ldots$ sono i valori delle caratteristiche corrispondenti a $g_c = 1$.

Ora $\delta u, \delta v, \delta w$, in funzione dei quali si debbono esprimere le $\delta^1\bar{\varepsilon}$ e le $\delta^2\bar{\varepsilon}$ non sono noti, per essi, ai pratici effetti, interessa determinare quella terna di funzioni cui corrisponde il minimo di g_c.

Seguendo l'uso corrente di riportarsi ad un problema variazionale da trattare con i metodi diretti delle serie minimizzanti, poniamo:

$$\delta u = \Sigma u_i f_i(x, \varphi)$$
$$\delta v = \Sigma v_i \varphi_i(x, \varphi)$$
$$\delta w = \Sigma w_i \psi_i(x, \varphi)$$

le f_i, φ_i, ψ_i soddisfacenti tutte le condizioni limiti sui timpani.

Risulta allora, scrivendo le condizioni di stazionarietà, un sistema di equazioni algebriche negli incogniti coefficienti u_i, v_i, w_i che danno, come condizioni di compatibilità, una equazione in g_c, di cui la minima radice è il valore cercato.

Il criterio approssimato consiste quindi nell'assegnare una configurazione di equilibrio indifferente, presumibilmente prossima a quella vera, da sostituire a quest'ultima a tutti gli effetti; e si presta, nella espressione analitica che precede, alla risoluzione di complessi problemi di equilibrio. Ritornando allo specifico problema che ci interessa, per la prevista condizione di carico risultano:

$$X = 0 \qquad Y = g \operatorname{sen} \varphi \qquad Z = g \cos \varphi.$$

Le componenti del tensore degli sforzi nella volta considerata come membrana sono [1]):

$$\begin{aligned} N'_x &= -\frac{1}{r}(l^2 - x^2)\cos\varphi \\ N'_\varphi &= -r\cos\varphi \\ N'_{x\varphi} &= -2x \operatorname{sen}\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Va fatto esplicito rilievo che lungo le generatrici estreme gli sforzi $N'_{x\varphi}$ non si annullano e ciò implica l'introduzione di un tirante: Per $\varphi = 90°$

$$N'_{\varphi} = -2x$$

e lo sforzo sul tirante è:

$$Z = -\int_x^l N'_{x\varphi}\, dx = l^2 - x^2.$$

Le componenti della deformazione, in funzione delle componenti dello spostamento, si scrivono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) & \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \chi_\varphi &= \frac{w}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} & \chi_{x\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) G. Krall: Strutture in foglio, volte-travi e volte secondo superfici di traslazione. Zanichelli, 1938, pag. 17.

Quando si trascurino l'effetto della contrazione trasversale e termini di correzione secondari, sussistono le seguenti relazioni fondamentali [1]):

$$N_x = D\varepsilon_x \qquad N_\varphi = D\varepsilon_\varphi \qquad N_{x\varphi} = \frac{1}{2} D\gamma_{x\varphi} \qquad (4)$$
$$M_x = K\chi_x \qquad M_\varphi = K\chi_\varphi \qquad M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = K\chi_{x\varphi}.$$

In cui $D = Ed$ è il coefficiente di rigidità all'allungamento, $K = \frac{Ed^3}{12}$ è il coefficiente di rigidità a flessione.

(E modulo di elasticità, d spessore della volta).

Il primo termine della (1) si esprime, per le (3) e (4), quando si indichi con $r dx d\varphi$ l'elemento superficiale della volta:

$$\frac{1}{2} D \int\left\{\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta v}{\partial \varphi} + \frac{\delta w}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta u}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)^2\right\} r dx d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2} K \int\left\{\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \varphi^2}\right)^2 + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial \varphi}\right)^2\right\} r dx d\varphi + \frac{A_{if} E}{2} \int\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2_{\vartheta = 90^\circ} dx$$

in cui il 3.° integrale tiene conto della presenza del tirante (A_{if} è l'area del tirante amplificata per il rapporto dei moduli di elasticità).

Procuriamoci ora le espressioni di $\delta^2\varepsilon_x$, $\delta^2\varepsilon_\varphi$, $\delta^2\varepsilon_{x\varphi}$ in funzione di u, v, w. A tale scopo indichiamo, per brevità di scrittura, delle formule che seguono, con $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ le coordinate curvilinee ortogonali prescelte, con $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ le relative variazioni e con u_1, u_2, u_3 le componenti dello spostamento.

Prima della deformazione

$$ds^2 = \sum_h g_{hh}\, d\alpha_h^2$$

a deformazione avvenuta, alla terna di valori

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$$

va sostituita la terna:

$$\alpha_1 + \Delta_1\ ,\quad \alpha_2 + \Delta_2\ ,\quad \alpha_3 + \Delta_3.$$

Le variazioni $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sono legate agli spostamenti u_1, u_2, u_3 dalle relazioni:

$$u_1 = \sqrt{g_{11}}\,\Delta_1 \qquad u_2 = \sqrt{g_{22}}\,\Delta_2 \qquad u_3 = \sqrt{g_{33}}\,\Delta_3.$$

Passiamo quindi a calcolare il ds'^2 da sostituire al primitivo ds^2: rileviamo che, per essere i coefficienti g_{hh} funzioni di α_h, essi andranno valutati

---

[1]) W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen Springer pg. 188.

nel punto $\alpha_h + \Delta_h$ ed, in pari tempo, ai differenziali $d\alpha_h$ andranno sostituiti i differenziali $(d\alpha_h + d\Delta_h)$; otterremo in conseguenza:

$$ds^{*2} = \sum_h g_{hh}(\alpha_1 + \Delta_1, \alpha_2 + \Delta_2, \alpha_3 + \Delta_3)(d\alpha_h + d\Delta_h)^2.$$

A meno di termini d'ordine superiore al 2.° troviamo:

$$g_{hh}(\alpha_1+\Delta_1, \alpha_2+\Delta_2, \alpha_3+\Delta_3) = g_{hh}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \sum_\rho \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho} \Delta_\rho + \frac{1}{2} \sum_{\rho r} \frac{\partial^2 g_{hh}}{\partial \alpha_\rho \partial \alpha_r} \Delta_\rho \Delta_r$$

$$d\Delta_h = \sum_k \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{\partial^2 \Delta_h}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} d\alpha_k d\alpha_l.$$

Segue pertanto:

$$ds^{*2} = \sum \left[g_{hh}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \sum_\rho \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho} \Delta_\rho + \frac{1}{2} \sum_{\rho r} \frac{\partial^2 g_{hh}}{\partial \alpha_\rho \partial \alpha_r} \Delta_\rho \Delta_r \right]$$
$$\left[d\alpha_h + \sum_k \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{\partial^2 \Delta_h}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} d\alpha_k d\alpha_l \right]^2.$$

Nel dichiarato ordine di approssimazione, terremo conto, nello sviluppo del quadrato, dei soli termini che seguono:

$$d\alpha_h^2 + \sum_k \frac{\partial \Delta_h^2}{\partial \alpha_k} d\alpha_k^2 + 2 \sum_k \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} d\alpha_h d\alpha_k + 2 \sum_{kl} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_l} d\alpha_k d\alpha_l.$$

Sostituendo e raccogliendo opportunamente si ricava:

$$ds^{*2} = \sum_h \left\{ g_{hh} + g_{hh} \left(\frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_h} \right)^2 + 2 g_{hh} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_h} + \sum_\rho \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho} \Delta_\rho + \frac{1}{2} \sum_{\rho r} \frac{\partial^2 g_{hh}}{\partial \alpha_\rho \partial \alpha_r} \Delta_\rho \Delta_r \right\} d\alpha_h^2 +$$
$$+ \sum'_{hk} g_{hh} \left(\frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} \right)^2 d\alpha_h d\alpha_k + 2 \sum'_{hk} g_{hh} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} d\alpha_h d\alpha_k + \sum_h \sum_{kl} g_{hh} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \pi_l} d\alpha_k d\alpha_l$$

(l'apice vuol significare che sono esclusi i termini di eguale indice perchè già computati nei sommatori senza apice, rispetto ad un solo indice).

Quando si rilevi che l'ultimo termine può scriversi anche:

$$\sum_{hk} \sum_l g_{ll} \frac{\partial \Delta_l}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \Delta_l}{\partial \alpha_h} d\alpha_k d\alpha_h$$

risulta che, posto, compendiosamente:

$$G_{hh} = \begin{cases} g_{hh} + g_{hh} \left(\dfrac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_h} \right)^2 + 2 g_{hh} \dfrac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_h} + \displaystyle\sum_\rho \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho} \Delta_\rho + \frac{1}{2} \sum_\rho \sum_r \frac{\partial_6 g_{hh}}{\partial \alpha_\rho \partial \alpha_r} \Delta_\rho \Delta_r & \text{per } h = k \\ g_{hh} \left(\dfrac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} \right)^2 + 2 g_{hh} \dfrac{\partial \Delta_h}{\partial \alpha_k} + \displaystyle\sum_l g_{ll} \frac{\partial \Delta_l}{\partial \alpha_h} \frac{\partial \Delta_l}{\partial \alpha_k} d\alpha_h d\alpha_k & \text{per } h \neq k \end{cases}$$

potremo scrivere, in definitiva, l'espressione non più ortogonale:

$$ds^{*2} = \sum_{hk} G_{hk}\, d\alpha_h\, d\alpha_k .$$

Abbiamo, senz'altro, le componenti della defermazione:

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\sqrt{G_{hh}} - \sqrt{g_{hh}}}{\sqrt{g_{hh}}}$$

$$\varepsilon_{hk} = \frac{G_{hk}}{\sqrt{G_{hh}\, G_{kk}}} .$$

Tali componenti possono esprimersi in termini degli spostamenti u_1, u_2, u_3 sostituendo, nelle espressioni di G_{hk}, Δ_h con $\dfrac{u_h}{\sqrt{g_{hh}}}$.

Ritornando allo specifico problema che c'interessa, per essere:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + r^2 d\varphi^2 \\ g_{11} &= 1 \ , \ g_{22} = r^2 \ , \ g_{33} = 0 \\ \alpha_1 &= x \quad \alpha_2 = \varphi \ , \ \alpha_3 = r \\ \Delta_1 &= u \quad \Delta_2 = \frac{v}{r} \ , \ \Delta_3 = w \\ u_1 &= u \quad u_2 = v \quad u_3 = w \end{aligned}$$

risultano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}w + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{r\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{r\partial \varphi}\right)^2\right\} + \frac{w}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad (5) \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{r}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

in cui i termini del primo ordine coincidono con i valori riportati nelle (3), i termini del secondo ordine sono i cercati valori di $\delta^2\varepsilon_x, \delta^2\varepsilon_\varphi, \delta^2\gamma_{x\varphi}$. Possiamo ora esprimere il secondo termine della (1) mediante le (2) e le (5):

$$\begin{aligned} &-\frac{g_c l^2}{2r_0}\int\left\{\cos\varphi\left[\left(\frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)^2\right] r\,dx\,d\varphi + \frac{g_c}{2r}\int x^2\cos\varphi\left[\left(\frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)^2\right] r\,dx\,d\varphi - \\ &-\frac{g_c}{2r}\int\cos\varphi\left[\left(\frac{\partial \delta u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\delta w\frac{\partial \delta v}{\partial \varphi}\right] r\,dx\,d\varphi + 2g_c\int x\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \delta u}{\partial \varphi}\frac{\partial \delta v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\delta w\frac{\partial \delta u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\delta w\frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial \varphi}\right) r\,dx\,d\varphi + \\ &+\frac{g_c}{2}\int(l^2 - x^2)\left\{\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2_{\varphi=90^\circ} + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)^2_{\varphi=90^\circ} + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)^2_{\varphi=90^\circ}\right\} dx. \end{aligned}$$

in cui l'ultimo integrale tien conto del lavoro di Z.

Noi porremo, soddisfacendo alle condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \delta u &= -U\cos\varphi\,\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2l} \\ \delta v &= \quad V\operatorname{sen}\varphi\cos\frac{\pi x}{2l} \\ \delta w &= -W\cos 2\varphi\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2l}. \end{aligned} \tag{6}$$

Eseguite le sostituzioni ed integrazioni otteniamo, sulle soglie della instabilità:

$$\begin{aligned} F(g_c) = D\Big(&\frac{\pi^3}{8l}U^2+\frac{\pi l}{2r^2}V^2+\frac{\pi l}{2r^2}W^2-\frac{2\pi l}{3r^2}VW+\frac{\pi^3 l}{12r^2}VW+\frac{\pi^3}{16l}V^2-\frac{\pi^2}{4r}UV\Big)+ \\ &+K\Big(\frac{\pi^5}{32l^3}+\frac{9\pi l}{2r^2}+\frac{\pi^3}{r^2 l}\Big)W^2-g_c\Big\{\frac{l}{r}\Big[\frac{2}{3}U^2+\Big(\frac{5}{3}-\frac{\pi^2}{9}\Big)V^2+\Big(56-\frac{8\pi^2}{15}\Big)W^2+ \\ &+\Big(\frac{\pi^3}{6}-\frac{11\pi}{6}\Big)VW\Big]-\frac{l^2}{r^2}\Big(\frac{8}{3\pi}UV+UW\Big)-\frac{\pi r}{3}UV\Big\}=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Poichè, ai pratici effetti, interessa il minimo fra i valori di g_c soddisfacenti la (7), i parametri U, V, W dovranno soddisfare le condizioni:

$$\frac{\partial F}{\partial U}=\frac{\partial F}{\partial V}=\frac{\partial F}{\partial W}=0.$$

Il sistema di equazioni lineari ed omogenee che ne consegue, conduce alla seguente equazione secolare di instabilità:

$$\begin{vmatrix} D\Big(\frac{\pi^3}{4l}+\frac{\pi l}{2r^2}\Big)-\frac{4}{3}\frac{l}{r}g_c & -D\frac{\pi^2}{4r}+\Big(\frac{8}{3\pi}\frac{l^2}{r^2}+\frac{4}{3}\pi\Big)g_c & \frac{l^2}{r^2}g_c \\ -D\frac{\pi^2}{4r}+\Big(\frac{8}{3\pi}\frac{l^2}{r^2}+\frac{4}{3}\pi\Big)g_c & D\Big(\frac{\pi l}{r^2}+\frac{\pi^3}{8l}\Big)-\Big(\frac{2\pi^2}{3}+10\Big)\frac{l}{3r}g_c & \\ & D\Big(\frac{\pi^3 l}{12r^2}-\frac{2}{3}\frac{\pi l}{r^2}\Big)+(11-\pi^2)\frac{l\pi}{6r}g_c & \\ \frac{l^2}{r^2}g_c & D\Big(\frac{\pi^3 l}{12r^2}-\frac{2}{3}\frac{\pi l}{r^2}\Big)+(11-\pi^2)\frac{l\pi}{6r}g_c & D\frac{\pi l}{r^2}+K\Big(\frac{\pi^5}{16l^3}+\frac{9\pi l}{r^4}+ \\ & & +\frac{2\pi^3}{r^2 l}\Big)-\Big(112-\frac{16\pi^2}{3}\Big)\frac{l}{15r}g_c \end{vmatrix}=0.$$

Nella precedente equazione appariscono termini proporzionali a d e termini proporzionali a d^3: i primi dipendono dalla variazione di dimensione della superficie della volta, i secondi dalla variazione di forma della stessa: termini dell'uno e dell'altro tipo appariscono in tutti i problemi di equilibrio di volte in cui l'instabilità non può aversi senza che varino le di-

mensioni della superficie media della volta stessa. La possibilità di una deformazione senza variazioni di lunghezze dipende dalla forma della volta e dai vincoli che la costringono, d'altra parte, l'impossibilità della sua realizzazione assicura del buon comportamento della volta di fronte alla instabilità dell'equilibrio.

Per la volta presa in esame, variando le espressioni di δu , δv , δw non appare facile realizzare una deformazione senza allungamenti e ciò è giustificato, almeno dal punto di vista intuitivo, dai vincoli assegnati alla volta (timpani liberi di rotare): esperienze su modelli, in via di esecuzione, porteranno un contributo alla conoscenza del comportamento della volta in esame.

Al solo scopo di assegnare una limitazione inferiore al valore di g_c trascuriamo, nella ricerca del minimo soddisfacente la (16), il contributo derivante dalla variazione di dimensione della superficie media della volta e, di più, supponiamo che ciò accada per $U = V = 0$; risulta allora semplicemente:

$$g_c = E \frac{r}{l} \frac{45\pi}{12} \frac{\frac{\pi^4}{16}\frac{d^3}{l^3} + 9\frac{ld^3}{r^4} + 2\pi^2 \frac{d^3}{r^2 l}}{336 - 16\pi^2}$$

relazione che è senz'altro valida ed intuitivamente accettabile per quei valori di $\frac{r}{l}$ che considera la pratica costruttiva nel dominio della teoria della membrana qui adottata.

Applicata al caso concreto per il quale siano

$l = 10$ m. $\qquad d = 6$ cm.

$r = 5$ m. $\qquad E = 2 \times 10^6$ kg. cm^{-2}

essa fornisce $g_c = 0{,}32$ Kgcm^{-2}.

Elementi matematici per l'economia corporativa. (Sul problema della produzione).

Nota del prof. **Giuseppe Palomba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 3 gennaio 1942 - XX).

Sunto. — L'A. continuando le indagini iniziate in un suo precedente studio, pone in evidenza la legge di dualità esistente fra il problema della produzione posto dai classici ed il medesimo problema posto in economia corporativa, cercando di chiarire quali concetti o, se possibile, quali parole debbano, fra loro, scambiarsi per passare dall'uno all'altro dei due. Mostra come, in generale, il problema dei classici non sia che un caso particolare del problema corporativo.

Facendo seguito ad un nostro precedente studio, pubblicato in questi Rendiconti [1]), dobbiamo — anzitutto — esaminare in che relazione si trova la posizione dell'economia corporativa rispetto a quella dell'economia classica. Poichè l'economia corporativa studia il processo produttivo nella sua « unitarietà » e nella sua « sinteticità » e poichè, inoltre, in essa, esiste un ente — qual'è la Corporazione — che sta al di sopra delle singole imprese costituenti un ciclo completo di lavorazione, resta salda la seguente corrispondenza fondamentale:

in economia classica:	*in economia corporativa:*
Il costo è rappresentato da un *punto* nel piano x, y $(x=A, y=B)$.	Il costo è rappresentato da una *linea* nel piano x, y.
x = grado di lavorazione,	x = grado di lavorazione,
y = costo totale.	y = costo totale.
Il costo è rappresentato da una *linea* nel diedro x, y, v $(x = A)$.	Il costo è rappresentato da una *superficie* nel diedro x, y, W.
v = quantità prodotta:	W = complessità dell'equilibrio [2]):
$y = f(v)$ [1]	$y = F(x, W)$. [1']

[1]) *Elementi matematici per l'economia corporativa. (Il problema di « minimo » posto dalle corporazioni).* Nota presentata dal socio corrispondente G. Andreoli, nell'adunanza del 4 maggio 1940 - XVIII.

[2]) Come definita nello studio precedente; e cioè: complessità dell'equilibrio relativa allo stadio finale. È bene notare che y è una quantità cumulata — in senso statistico —; lo stesso dicasi di tutte le grandezze che sono funzione di x.

Se, poi, dividiamo la [1] per v otteniamo ciò che, per l'economia classica, costituisce il cosiddetto *costo unitario medio*. In economia corporativa la [1'] ci dice quanto costa il porre in essere ed il matenere in vita una certa complessità dell'equilibrio economico W; essa ci dice, inoltre, quant'è questo costo nei vari stadi lavorativi. Come caso particolare, poi al posto di W si può porre il valore v_r, cioè il volume produttivo che pone in essere un'impresa appartenente al grado r^{mo} di lavorazione, sia esso l'ultimo, ovvero il primo, ovvero uno intermedio qualsiasi. Se ci riferiamo al volume produttivo v_1 che pone in essere un'impresa appartenente all'ultimo stadio lavorativo, sarà altresì:

$$W = \varphi_1(v_1)$$

mentre se ci riferiamo al volume v_r posto in essere da un altro qualsiasi grado lavorativo, sarà:

$$W = \varphi_r(v_r).$$

Sicchè se dividiamo la [1'] per W otterremo la *superficie del costo unitario medio*, vale a dire il costo medio di una unità della complessità W: tale superficie ci dice, perciò, come si *deforma* la linea dei costi unitari medesimi al variare della complessità dell'equilibrio economico, relativa all'ultimo stadio di lavorazione.

Identico ragionamento dovrà ripetersi per il *costo marginale*. Per l'economia classica esso è dato dalla derivata della [1] rispetto alla quantità prodotta, cioè rispetto a v, e ci dice qual'è il costo dell'ultima particella di prodotto posta in essere. Per l'economia corporativa, invece, si tratterà di trovare la derivata parziale della [1'] rispetto a W, e troveremo, così, quanto costa il portare la complessità dell'equilibrio da W a $W + dW$: anche qui, allora, la superficie dei costi marginali ci dice come si *deforma* la linea dei costi marginali stessi al variare della complessità dell'equilibrio economico, relativa all'ultimo stadio di lavorazione.

Tenendo sempre presente che il costo in economia classica è una grandezza comune, mentre in economia corporativa è un funzionale, avremo perciò:

in economia classica:

La legge del *costo unitario medio* è rappresentata da una *linea* nel diedro x, y, v $(x = A)$:

$$c(v) = \frac{f(v)}{v} \qquad [2]$$

in economia corporativa:

La legge del *costo unitario medio* è rappresentata da una *superficie* nel diedro x, y, W:

$$c(x, W) = \frac{F(x, W)}{W}. \qquad [2']$$

La legge del *costo marginale* è rappresentata da una *linea* nel diedro x, y, v $(x = A)$:

$$\gamma(v) = \frac{df(v)}{dv} \qquad [3]$$

La legge del *costo marginale* è rappresentata da una *superficie* nel diedro x, y, W:

$$\gamma(x, W) = \frac{\partial F(x, W)}{\partial W}. \qquad [3']$$

Siamo, così, in grado di calcolare il luogo d'incontro della [2] e della [3] e, quindi, della [2'] e della [3'].

in economia classica:

Il luogo d'incontro è costituito da un punto che chiamasi *punto di fuga*.

Tale punto avrà per equazione:

$$\frac{f(v)}{v} = \frac{df(v)}{dv} \qquad [4]$$

ed esso *cadrà nel punto di minimo* della curva dei costi unitari. Infatti, derivando la [2], si ha:

$$c'(v) = \frac{vf'(v) - f(v)}{v^2} = \frac{1}{v}\left[f'(v) - \frac{f(v)}{v}\right] \qquad [5]$$

che, logicamente, si annulla allorchè si verifica la [4]. Quindi etc., etc.

in economia corporativa:

Il luogo d'incontro è costituito da una linea che, per analogia, chiameremo *linea di fuga*.

Tale linea avrà per equazione:

$$\frac{F(x, W)}{W} = \frac{\partial F(x, W)}{\partial W} \qquad [4']$$

ed essa *cadrà lungo la linea di minimo* della superficie dei costi unitari. Infatti, derivaddo la [2'], si ha:

$$c'(x, W) = \frac{\left(W\frac{\partial F}{\partial W}\right) - F(x, W)}{W^2} = \frac{1}{W}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial W} - \frac{F(x, W)}{W}\right] \qquad [5']$$

che, logicamente, si annulla allorchè si verifica la [4']. Quindi etc., etc.

La simmetria fra il comportamento della [5] e della [5'] viene a confermare l'uniformità, fin qui riscontrata, per cui l'economia classica risulta costantemente un caso particolare dell'economia corporativa. Il prendere, cioè, in considerazione il processo produttivo nella sua « unitarietà » e nella sua « sinteticità » ha per risultato di non alterare *formalmente* la posizione del punto di fuga d'un qualsiasi stadio di lavorazione rispetto alla posizione che sarebbe venuta a determinarsi col solo gioco delle forze individualistiche e liberistiche. E, del resto, non poteva che avvenire questo, data la natura del nuovo vincolo che viene ad operare in economia corporativa; vincolo secondo il quale ciascuna impresa appartenente ad un determinato ciclo produttivo non fa i propri calcoli guardando il suo volume produttivo bensì

quello dell'ultimo stadio lavorativo che, *per ipotesi*, dà il « tempo » allo intero processo di lavorazione.

Tuttavia, la soluzione dell'economia corporativa, se — in generale — coincide con quella dell'economia classica, *almeno dal punto di vista formale*, non è detto che debba, *sostanzialmente e concretamente*, avere gli identici fini a garantire gli identici risultati. Questo é un punto fondamentale: *l'economia classica* garantisce, a ciascuna impresa, *l'equilibrio con se stessa* ma non con l'intero ciclo produttivo; *l'economia corporativa*, invece, garantisce, a ciascuna impresa, *l'equilibrio con l'intero ciclo produttivo* ma non con se stessa. Che sia poi necessario introdurre la variabile W al posto della v dell'economia classica è appena il caso di ricordarlo visto che è proprio la prima di esse a determinare la *forma* caratteristica che assume la [1']: W è una grandezza *sintetica* propria al processo produttivo, v è una grandezza *analitica* propria allo stadio lavorativo.

Ma dal punto di vista delle ulteriori deduzioni teoriche le conseguenze dei due sistemi vengono ancora maggiormente a divergere. In economia classica, il punto di fuga — proiettato sull'asse delle v — determina, per ciascuna impresa, *univocamente*, la posizione di equilibrio; e tutto finisce lì. In economia corporativa, invece, proiettata la linea di fuga sul piano v, W potrà aversi un punto, una perpendicolare all'asse delle W, ovvero — infine — un'altra linea qualsiasi che, proiettata a sua volta sull'asse delle W, risulta compresa fra due valori W_1 e W_2: in quest'ultimo caso esistono, dunque, vari valori di W, tutti in grado di assicurare l'equilibrio all'intero processo produttivo. Se tali soluzioni sono — *anche in senso economico* — tutte *ugualmente* possibili, ciò starà a significare che, in concreto, ne verrà adottata una qualsiasi, *a caso*, in guisa tale che, *a turno*, ciascuno stadio produttivo, possa risultare — se ciò è possibile — non solo in equilibrio col sistema ma benanche in equilibrio con se stesso, a meno che non si voglia pensare ad uno stadio privilegiato che — per ragioni naturali, o legali, o convenzionali — sia in grado di imporre la sua volontà all'intero processo di fabbricazione. Noi facciamo astrazione da questa ipotesi che, in concreto, potrebbe anche risultare la meno improbabile: noi fermiamo l'attenzione non su ciò che *potrebbe essere* ma su ciò che *dovrebbe essere*.

D'altra parte, allora, l'economia classica ha bisogno d'un mezzo per aggiustare, eventualmente, l'equilibrio del processo lavorativo (non garentito dal sistema) coll'equilibrio delle singole imprese dei vari stadi produttivi, come, viceversa, l'economia corporativa ha bisogno, a sua volta, d'un altro mezzo per aggiustare, eventualmente, l'equilibrio delle singole imprese (non garentito dal sistema) coll'equilibrio del processo lavorativo. Ed infatti:

in economia classica:

L'equilibrio di *ciascuna impresa col processo lavorativo* è assicurato dalla eventuale presenza di scarti fra prezzi e punti di fuga che assicurano, in diversa misura, delle rendite a questo o a quello stadio di lavorazione.

La posizione effettiva *tende a raggiungere* la posizione d'equilibrio mediante successive approssimazioni, *entro un determinato periodo di tempo*, per il fatto che la divergenza fra prezzo e punto di fuga tende ad armonizzare opportunamente le quantità prodotte dalle singole imprese.

Una volta raggiunta la posizione di equilibrio essa si *cristallizza* e suggerisce l'idea d'una posizione di equilibrio *stabile*.

Tale stabilità *non può* mai, spontaneamente, alterarsi, perchè più imprese appartenenti a più stadi produttivi non possono — *permanentemente* — porre in essere volumi produttivi, fra loro, incompatibili.

Di conseguenza: la rottura dell'equilibrio sviluppa, nel sistema, un complesso di forze tendenti a *ricondurre* la posizione iniziale.

in economia corporativa:

L'equilibrio di *ciascuna impresa con se stessa* è assicurato dalla eventuale simultanea coesistenza di varie complessità, tutte ugualmente in grado di garentire l'equilibrio di ciascun stadio lavorativo coll'intero processo produttivo.

L'equilibrio effettivo *fluttua permanentemente* intorno all'equilibrio teorico (cioè medio), per il fatto che, casualmente, a turno, ciascuna impresa imprime al processo produttivo quella complessità che le assicura l'equilibrio con se stessa.

La fluttuazione intorno alla posizione d'equilibrio è *ciclica* e suggerisce l'idea d'un equilibrio *stazionario*.

Tale stazionarietà *può* sempre, spontaneamente, alterarsi, per il fatto che più imprese appartenenti a più stadi produttivi possono — *contemporaneamente* — adottare complessità, fra loro, incompatibili [1]).

Di conseguenza: la rottura nella stazionarietà dell'equilibrio sviluppa un complesso di forze capaci di *iniziare* un processo dinamico, vero e proprio.

---

[1]) Ed infatti: se lo stadio produttivo X si regola in modo da porre in essere una complessità w, mentre lo stadio produttivo $X+a$ si regola in modo da porre in essere una complessità $w-b$, le due complessità non sono, fra loro, compatibili e per renderli tali sarà necessario che una parte della produzione dello stadio X salti — sotto forma « materiale » o di « risparmio amorfo » — alcuni stadi e cerchi di avvicinarsi, più rapidamente, allo stadio finale: il che mette in moto tutto un processo involutivo tendente a deprimere la complessità dell'equilibrio e ad abbreviare la lunghezza del ciclo di lavorazione. E viceversa se la complessità che vorrebbe porre in essere lo stadio $X+a$ è *anormalmente* maggiore di quella che vorrebbe porre in essere lo stadio X. Si osservi che la Corporazione è estranea al prodursi di questa

Come, dunque, si vede, mentre nell'economia liberale prevale la preoccupazione di *regolarizzare* l'organizzazione orizzontale della produzione, in economia corporativa prevale la preoccupazione di *regolare* l'organizzazione verticale della produzione: lì, l'organizzazione orizzontale implica, attraverso il gioco dei prezzi e l'automatismo proprio di quel sistema, per via indiretta, l'aggiustamento dell'organizzazione verticale; qui, l'organizzazione verticale, implica, attraverso il gioco della complessità dell'equilibrio, per via indiretta — probabilmente favorita dall'azione di organi propri al regime corporativo — l'aggiustamento dell'organizzazione orizzontale [1]). Al limite, si passa dall'economia liberale all'economia corporativa guardando da due punti di vista differenti il medesimo fenomeno: quello cioè della produzione: nella prima lo si guarda dal punto di vista dell'organizzazione orizzontale, nella seconda lo si guarda dal punto di vista dell'organizzazione verticale.

Dal punto di vista dello strumento matematico è, anzitutto, evidente

---

possibilità perchè, teoricamente, qualsiasi valore compreso fra W_1 e W_2 risolve il problema dell'intero ciclo lavorativo, mentre essa — lasciando un grado di libertà al sistema — lo mette in grado di fargli trovare, *casualmente*, il suo assetto stazionario. Il suo intervento, ove fosse attuabile, facilmente potrebbe risultare di natura protettiva e, comunque, arbitraria.

Naturalmente, poi, la complessità dell'equilibrio reagisce, a sua volta, sul percorso delle particelle di beni strumentali e tende a farle saltare all'indietro nel caso che va aumentando, mentre tende a farle saltare in avanti nel caso opposto. Su ciò si potrebbe vedere, giudicando con una certa benevolenza, il nostro volume: *Introduzione allo studio della dinamica economica.* Napoli, 1939.

La differenza fra l'economia liberale e quella corporativa è che nella prima il gioco dei prezzi smorza qualsiasi perturbamento, mentre nella seconda il gioco della complessità lo ingrandisce sensibilmente. Ma, bisogna intendersi. Non che l'elemento prezzo non entri nella effettualità dell'economia corporativa; ma poichè essa considera quell'elemento sempre in funzione del grado lavorativo — considera, cioè, come per il costo, la *linea* dei prezzi — non si ferma tanto sull'altezza dei singoli prezzi quanto sulla ripidezza di quella linea. Per parlar spicciolo, supponendo quella linea identificata con una retta, per l'economia corporativa la vera grandezza segnaletica di quella retta, è data dall'inclinazione che essa presenta coll'asse delle X. Orbene, mentre « prezzo » e « quantità prodotta » — grandezze dell'ordine individuale proprie all'economia classica — son delle grandezze che, turbate, danno luogo a movimenti *compensativi*, « linea dei prezzi » e « complessità dell'equilibrio » — grandezze dell'ordine collettivo proprie all'economia corporativa — son delle grandezze che, turbate, danno luogo a movimenti *cumulativi*.

[1]) È importante notare che l'economia sovietica, qual'è vissuta nella U. R. S. S., si avvicina — da questo punto di vista — più all'economia liberale anzichè a quella corporativa.

che mentre nell' economia classica prevale l' uso del calcolo infinitesimale e del calcolo variazionale quale sviluppo del primo, nell' economia corporativa prevale l' uso del calcolo funzionale e del calcolo variazionale quale sviluppo e coronamento di esso [1]). Inoltre, mentre in economia classica prevale l'analogia colla meccanica newtoniana, in economia corporativa prevale l' analogia colla meccanica atomica e, per molti aspetti, colla biologia matematica. In ogni caso, l' economia classica è tutta pervasa da uno spirito deterministico, l' economia corporativa è tutta pervasa da uno spirito probabilistico e volontaristico.

Come e perchè ciò accada lo vedremo in note successive: per ora ci basti fissare il concetto che i due sistemi economici differiscono sostanzialmente fra di loro anche se, formalmente, presentano un certo parallelismo ed una certa simmetria. Ciò risulterà ancora da quanto andremo ora, esponendo.

È noto che il *problema tecnico* della produzione, partendo dall' equazione della tecnica, mira a stabilire l' impiego razionale dei vari fattori produttivi.

Se, allora, chiamiamo con v il volume produttivo posto in essere; con $v_1, v_2, \ldots, v_n$, i quantitativi (incogniti) dei vari fattori occorrenti a quella produzione; con $p_{v_1}, p_{v_2}, \ldots, p_{v_n}$, i prezzi unitari (noti) corrispondenti, avremo la relazione:

$$v = F(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad [6]$$

che costituisce l' *equazione della tecnica*. È, poi, certo che dovrà essere, indicando con y il costo totale:

$$y = p_{v_1} v_1 + p_{v_2} v_2 + \ldots + p_{v_n} v_n. \qquad [7]$$

Naturalmente l'imprenditore si sforzerà di minimizzare la [7] allorchè la [6] assume un certo valore, ovvero si sforzerà di massimizzare la [6] allorchè la [7] assume un certo altro valore. Se segue la prima via dovrà essere:

$$dy = p_{v_1} dv_1 + p_{v_2} dv_2 + \ldots + p_{v_n} dv_n = 0$$

e poi:

$$dv = \frac{\partial F}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2} dv_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v_n} dv_n = 0$$

---

[1]) Come risulterà da note successive che abbiamo in animo di scrivere, l' economia corporativa può anche utilizzare alcuni dei più moderni e brillanti risultati del calcolo e dell' algebra delle matrici.

e, quindi:

$$p_{v_1}\,dv_1+p_{v_2}\,dv_2+\ldots+p_{v_n}\,dv_n=\frac{\partial F}{\partial v_1}\,dv_1+\frac{\partial F}{\partial v_2}\,dv_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial v_n}\,dv_n$$

da cui, infine, risulta:

$$\frac{1}{p_{v_1}}\,\frac{\partial F}{\partial v_1}=\frac{1}{p_{v_2}}\,\frac{\partial F}{\partial v_2}=\ldots=\frac{1}{p_{v_n}}\,\frac{\partial F}{\partial v_n}. \qquad [8]$$

Le [8] sono in numero di $n-1$ che, unite alla [6], ci forniscono proprio n equazioni simultanee, compatibili ed indipendenti, atte a fornirci i valori di $v_1, v_2, \ldots, v_n$ incogniti. Queste $n-1$ relazioni ci esprimono, com'è noto, le *uguaglianze delle produttività marginali ponderate.*

Cerchiamo, ora, di risolvere lo stesso problema in economia corporativa. Se le singole v_i staranno a rappresentare delle categorie più ampie di fattori produttivi, come — ad es. — lavoro, capitali fissi, capitali circolanti, etc., la duale della [6] la porremo sotto la forma seguente:

$$w(x)=F[v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)] \qquad [6']$$

ed essa, per l'economia corporativa, costituirà l'*equazione tecnica della complessità dell'equilibrio*: si differisce dalla [6] perchè le singole $v_i(x)$ non sono delle grandezze comuni, bensì dei funzionali. Il costo corrispondente a questa complessità sarà fornito dalla duale della [7], e cioè dalla relazione:

$$y(x)=p_{v_1}(x)\cdot v_1(x)+p_{v_2}(x)\cdot v_2(x)+\ldots+p_{v_n}(x)\cdot v_n(x) \qquad [7']$$

di evidente significato. Anche qui dovrà essere:

$$dF=\left[\frac{\partial F}{\partial v_1(x)}\,\frac{dv_1(x)}{dx}+\frac{\partial F}{\partial v_2(x)}\,\frac{dv_2(x)}{dx}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial v_n(x)}\,\frac{dv_n(x)}{dx}\right]dx=0$$

ed inoltre:

$$dy=\left[p_{v_1}(x)\,\frac{dv_1(x)}{dx}+p_{v_2}(x)\,\frac{dv_2(x)}{dx}+\ldots+p_{v_n}(x)\,\frac{dv_n(x)}{dx}\right]dx=0.$$

Sarà, quindi, uguagliando queste due ultime relazioni e procedendo con evidenti passaggi:

$$\frac{1}{p_{v_1}(x)}\,\frac{\partial F}{\partial v_1(x)}=\frac{1}{p_{v_2}(x)}\,\frac{\partial F}{\partial v_2(x)}=\ldots=\frac{1}{p_{v_n}(x)}\,\frac{\partial F}{\partial v_n(x)}. \qquad [8']$$

Le [8'], in numero di $n-1$, unite alla [6'] ci forniscono — *qualunque sia* x — le funzioni incognite $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ e ci esprimono le *uguaglianze delle produttività marginali ponderate*, non più riferite ad un singolo stadio di lavorazione ma al processo produttivo nel suo complesso. Anche qui appare che l'economia classica è un caso particolare dell'economia corporativa: la dualità esistente fra le [8] e le [8'], oltre che fra la [6] e la [6'], è di per sè esplicativa nel suo intimo significato.

Tuttavia è un errore credere che le due soluzioni coincidano perfettamente in concreto, nel senso che, in economia classica, ciascuno stadio lavorativo, risolvendo per conto proprio il problema, contribuisca — *indirettamente* — a risolverlo per l'intero ciclo lavorativo: quanto esponemmo nello studio precedente, citato da principio, istruisce compiutamente al riguardo.

Catania, R. Università, giugno 1941 - XIX.

Rendimento di energia degli elettrolizzatori a diaframmi filtranti per cloruro sodico

Nota dell' ing. **Mario M. Jacopetti,** *presentata dal socio* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 2 maggio 1942 - XX).

Sunto. — L' A. — premessa una definizione esatta del rendimento di energia per un elettrolizzatore — considera i due fattori che lo costituiscono, e cioè: il rendimento di corrente ed il rendimento di voltaggio. Poichè il primo di tali fattori è già stato a fondo studiato, ferma la sua attenzione sul secondo e precisamente sul voltaggio totale e sui vari termini che lo costituiscono: potenziale di equilibrio, sovratensione complessiva e caduta ohmica. Viene approfondito lo studio di questi tre termini ed in particolare vengono presi in esame: da un lato la sovratensione complessiva, per cui si dà una formula che ne rappresenta l' andamento al variare della densità di corrente; e, dall' altro, la caduta ohmica stabilendo le relazioni che passano tra questa grandezza e la caduta istantanea di tensione, la quale si verifica all' interrompersi della corrente alimentatrice.

Le formule ottenute ed il nuovo metodo di misura della detta caduta istantanea di tensione, già elaborato dallo stesso A., vengono applicati allo studio di alcuni elettrolizzatori industriali in varie condizioni di marcia, mettendo in chiaro l' influenza che l' invecchiamento del diaframma ed il consumo progressivo degli anodi esercitano sul rendimento di energia.

Si osserva che il metodo di registrazione della caduta istantanea di tensione permette di giungere ad una misura precisa della cosiddetta tensione di saturazione e se ne discute il significato, dimostrando che essa deve coincidere — a meno della polarizzazione di concentrazione, che è sempre molto piccola — con la tensione minima di decomposizione.

Si dà infine un metodo per dedurre, da misure industriali, il valore della tensione minima di decomposizione, metodo che viene applicato in pratica su intere batterie di elettrolizzatori e che conduce a calcolare valori concordanti con quelli misurati per la tensione di saturazione.

Il rendimento di energia R_e in un processo di elettrolisi si definisce come il rapporto tra la quantità di energia che sarebbe teoricamente necessaria e quella effettivamente impiegata a produrlo.

Se indichiamo con v la differenza di potenziale applicata all'elettrolizzatore, con Q la quantità di elettricità utilizzata e con A l' affinità del processo, si ha:

$$R_e = \frac{A}{vQ}. \qquad (1)$$

Se nel processo sono coinvolti n FARADAY, e se si designa con η la corrispondente forza elettromotrice:

$$A = \eta n F \tag{2}$$

e quindi:

$$R_e = \frac{\eta}{v} \frac{nF}{Q} \tag{3}$$

dove possiamo porre:

$$\frac{\eta}{v} = R_t \quad ; \quad \frac{nF}{Q} = R_c$$

indicando rispettivamente con R_t e con R_c il *rendimento di tensione* ed il *rendimento di corrente.*

La valutazione di R_c è relativamente facile in quanto che — una volta precisata l'equazione di reazione del processo chimico — non possono sussistere dubbi circa la quantità di elettricità che teoricamente gli corrisponde. Non mancano le trattazioni teoriche e le ricerche sistematiche circa l'influenza che i diversi fattori costruttivi ed operativi esercitano sul rendimento di corrente ed in particolare esaurienti sono gli studi riguardanti gli elettrolizzatori con diaframmi filtranti per cloruri alcalini [1]).

Meno semplice si presenta il problema relativo al rendimento di tensione perchè è già difficile il più delle volte di fissarne l'ammontare, che implica la precisa valutazione dell'affinità tenendo conto dello stato iniziale e finale, e quindi il calcolo di η nelle condizioni effettive di elettrolisi. Ancora più intricato è lo studio degli altri fattori che intervengono a determinare lo ammontare di v e, di conseguenza, mancano quasi nella letteratura gli studi sul rendimento di tensione e quindi sul rendimento di energia degli elettrolizzatori industriali.

Nel caso degli elettrolizzatori a diaframmi filtranti per cloruro sodico STENDER, ZIVOTINSKY e STROGANOFF [2]) hanno tentato uno studio del genere avvalendosi dei dati conduttometrici di GIORDANI e MARESCA [3]) sugli elettroliti che si adoperano nella pratica industriale, nonchè di proprie misure di tensione dei singoli elettrodi, limitandosi a fare il bilancio complessivo,

---

[1]) GIORDANI F., *La teoria degli elettrolizzatori a diaframma.* Memorie R. Acc. d'Italia, vol. I, n. 6; 1930.

[2]) STENDER W. W., ZIVOTINSKY P. B. e STROGANOFF M. M., *The voltage of a cell for the electrolysis of sodium chloride solutions.* Trans. Electroch. Soc., vol. LXV, pp. 189-212; 1934.

[3]) GIORDANI F. e MARESCA T., *Studi sul comportamento conduttometrico delle soluzioni di cloruro sodico.* Gazz. Chim. It., vol. LIX, pp. 870-891; 1929.

senza discriminare tra tutti i termini i quali concorrono a formare l'ammontare complessivo di v.

Lo studio così limitato è di certo insufficiente dappoichè non basta rifare il bilancio del consumo di energia in atto in un determinato elettrolizzatore; ma occorre conoscere il valore limite teorico di tale consumo per fissare la mèta cui tendere ed occorre altresì di saper discriminare l'influenza che i vari fattori costruttivi ed operativi esercitano sull'ammontare della energia effettivamente consumata, onde fissare le linee pratiche di azione per avvicinare la mèta stessa.

La precisazione dei vari termini che concorrono a formare il valore di v è stata di recente affrontata sistematicamente in questo Istituto ed il relativo studio può essere impostato in modo abbastanza preciso, come qui accenneremo [4]).

La tensione totale v si considera ordinariamente costituita dalla somma di tre termini:

1.°) il potenziale di equilibrio η che avrebbero gli elettrodi nel liquido elettrolitico adoperato e sotto la pressione normale dei gas che eventualmente si sviluppano;

2.°) la sovratensione complessiva σ che si ha ai due elettrodi nelle condizioni di lavoro e che si definisce, per ognuno, come differenza tra il potenziale che esso ha nelle dette condizioni e quello di equilibrio di uno stesso elettrodo in riposo nello stesso elettrolita e nelle stesse condizioni di pressione e di temperatura;

3.°) la caduta ohmica RI.

Di solito si scrive:

$$v = \eta + \sigma + RI. \qquad (4)$$

Non è sempre facile di calcolare, in base ai dati metrici dell'apparecchio e conduttometrici dell'elettrolita, la resistenza interna R di un elettrolizzatore industriale, come in genere dei generatori e dei ricettori elettrochimici. Indipendentemente dal fatto che forma, dimensione e disposizione degli elettrodi possono talvolta rendere difficile il calcolo, c'è da tener conto delle variazioni che risente da punto a punto, in condizioni di regime, la composizione del liquido ed inoltre bisogna molto spesso valutare il contributo che alla resistenza complessiva porta il diaframma, il quale cambia di caratteristiche ed anche di dimensioni a misura che invecchia.

Occorrerebbe perciò ricorrere alla misura diretta.

All'inizio di questi studi abbiamo considerato la possibilità di misurare la caduta ohmica RI attraverso la registrazione, con metodo fotografico,

---

[4]) Beretta U., *Studi energetici sui fenomeni di elettrolisi*. Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Reale di Napoli, s. 4ª, vol. XII, pp. 33-96; 1941-42.

della caduta istantanea di tensione Δv che si ha all'atto in cui si interrompe la corrente alimentatrice dell'elettrolizzatore; ed abbiamo all'uopo messo a punto il metodo di misura [5]) e costruito un adatto apparecchio per realizzarlo anche comodamente in sede di lavorazioni industriali [6]).

L'esperienza sistematica ha però dimostrato che in realtà, all'atto della interruzione della corrente alimentatrice, cade non soltanto quella parte di tensione dovuta alla resistenza interna dell'elettrolizzatore, ma anche una aliquota della sovratensione e propriamente quella che varia al variare della densità di corrente [7]).

Si deve, in altri termini, ritenere che la sovratensione totale consti a sua volta della somma di tre termini:

1.°) la polarizzazione di concentrazione γ, dovuta al fatto che, in condizioni di lavoro ed a regime, nello strato di soluzione ad immediato contatto con ciascuno dei due elettrodi la concentrazione dello jone elettrometricamente attivo è diversa da quella che si ha nell'elettrolita in riposo;

2.°) una parte aliquota δ della polarizzazione cosiddetta chimica, che è praticamente indipendente dalla densità di corrente e che cade lentamente dopo l'interrompersi di questa;

3.°) una parte aliquota ρ della polarizzazione chimica, che varia in funzione della densità di corrente e che cade istantaneamente all'interrompersi di questa.

Pertanto la caduta istantanea di tensione sarebbe data dalla somma della caduta ohmica RI e del predetto termine ρ, e cioè:

$$\Delta v = \rho + RI. \tag{5}$$

La formula (4) si può scrivere:

$$v = \eta + \gamma + \delta + \rho + RI \tag{6}$$

e per la (5):

$$v = \eta + \gamma + \delta + \Delta v. \tag{7}$$

La somma dei primi tre termini sta a rappresentare la polarizzazione di saturazione E_s che si misura ai capi dell'elettrolizzatore all'atto in cui

---

[5]) Jacopetti M. M. e Beretta U., *La misura della resistenza interna di accumulatori ed elettrolizzatori.* Rend. XL Riunione Annuale A. E. I., pp. 173-6; 1935.

[6]) Jacopetti M. M., *Apparecchio registratore fotografico per la misura della resistenza interna di generatori e di ricettori elettrochimici.* La Chimica e l'Industria, vol. XXIV; pp. 157-60; 1942.

[7]) Ferguson A. L., *Polarisation and overvoltage with special attention to transfer resistance.* Trans. Electroch. Soc., vol. LXXVI, pp. 113-141; 1939.

si interrompe la corrente, e che deve essere press'a poco eguale — e cioè a meno dell'influenza del termine γ, in generale molto piccolo — alla tensione minima di decomposizione E_d.

Possiamo scrivere perciò la (7) anche sotto le due forme che seguono:

$$v = E_s + \Delta v \qquad (7')$$
$$v = E_d + \Delta v. \qquad (7'')$$

La grandezza E_d — che nelle ricerche di laboratorio si misura col metodo di Le Blanc — può essere anche misurata sugli elettrolizzatori industriali con sufficiente approssimazione eseguendo rapidamente — in modo da evitare sensibili variazioni di temperatura e di composizione degli elettroliti — una serie di rilievi contemporanei di tensione e di corrente fino ai valori più piccoli di questa, ed estrapolando poi per $I = 0$.

Il valore di E_s si valuta invece, con il nostro metodo di registrazione fotografica, come differenza tra v e Δv.

Resta incerta la misura di RI, la quale potrebbe invero essere eseguita misurando, con due elettrodi di riferimento, i potenziali che competono ai singoli elettrodi di lavoro e quindi la forza controelettromotrice complessiva, a meno del solo potenziale di diffusione. Detraendo dalla tensione totale applicata la detta forza controelettromotrice, resta il valore di RI. In pratica però una simile misura risulta spesso oltremodo difficile ed incerta.

Cercheremo di valutare qui di seguito i vari elementi che costituiscono la differenza di potenziale totale v, applicata ai capi dell'elettrolizzatore.

Calcolo di η.

La tonalità termica della reazione

$$2NaCl + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + Cl_2 + H_2$$

si può calcolare con sufficiente esattezza a partire dai dati termochimici disponibili [8]). Per il cloruro di sodio il calore di formazione in soluzione acquosa satura è 409,2 kj; per l'idrossido in soluzione che ne contenga una molecola per 13,5 di H_2O, cioè una soluzione circa 4 molare, il calore di formazione è di 470,2 kj; per l'acqua, trascurando la variazione di attività, si può porre il valore di 286,2 kj; e quindi si ha:

$$Q = 818{,}4 + 572{,}4 - 940{,}4 = 450{,}4 \text{ kj}. \qquad (8)$$

Se ci serviamo di questo dato per calcolare la f. e. m. della pila corrispondente, con la formula approssimata di Thomson, troviamo il valore:

$$e = \frac{450{,}4}{2} \cdot 0{,}010363 = 2{,}333. \qquad (9)$$

[8]) *International Critical Tables*, V, 176 e segg. (Mc Graw Hill, New-York; 1929).

Per completare il calcolo sarebbe necessario di conoscere il coefficiente di temperatura della f. e. m., che non è facile di valutare direttamente e per il quale BILLITER [9]) indica, senza fornire spiegazioni, un valore di —0,0004 *V*.

Se si conosce ad una data temperatura il potenziale di equilibrio dei singoli elettrodi, nelle condizioni prescelte, si valuta per differenza la f. e. m. nella pila corrispondente a meno del solo potenziale di diffusione, e quindi si può arrivare alla conoscenza del coefficiente di temperatura.

Le condizioni prescelte corrispondono alla soluzione satura di NaCl (5,2 M) come anolita e ad un catolita che contenga 120 g/L di NaOH, titolo che oggi si raggiunge di consueto nella marcia industriale di questi elettrolizzatori.

Il coefficiente di attività per gli joni della prima soluzione è 0,860 [10]) e quindi il potenziale di equilibrio dell' elettrodo a Cl_2 sarà, alla temperatura di 25°C:

$$\eta_a = 1{,}359 - 0{,}059 \log (0{,}860 \times 5{,}2) = 1{,}321. \qquad (10)$$

Per la seconda soluzione il coefficiente di attività degli joni è 0,75; l' attività dell' acqua dipende dalla concentrazione dell' idrossido e del cloruro sodico indecomposto e perciò — tenuto conto dell' andamento parallelo dell' attività del solvente nelle soluzioni di solo cloruro e di solo idrossido — sarà lecito di assumere, in prima approssimazione, che essa sia uguale a quella che si avrebbe in una soluzione satura di NaCl. In altri termini si assume che l' attività dell' acqua (in questo caso 0,957) si mantenga immutata per tutti i catoliti che provengono dalla decomposizione, più o meno spinta, di una determinata salamoia iniziale.

Poniamo infine, alla temperatura di 25°C, il prodotto delle concentrazioni degli joni dell' acqua [11]):

$$[OH^-]\,[H^+] = 10^{-13{,}99}.$$

Risulta da ciò:

$$\eta_c = 0{,}059 \log \frac{0{,}957 \cdot 10^{-13{,}99}}{3 \times 0{,}75} = -0{,}852\ V. \qquad (11)$$

---

[9]) BILLITER J., *Électrolyse de l' eau et des chlorures alcalins.* (Dunod, Paris; 1929) p. 95.

[10]) Per i coefficienti di attività e per la letteratura corrispondente veggasi: LANDOLT-BOERNSTEIN, *Physikalisch-chemische Tabellen, II Eryzbd* (J. SPRINGER, Berlin, 1931) pp. 1126-7. Per il potenziale normale del Cl_2 veggasi: LEWIS G. N. and RUPERT F. F., *The potential of the chlorine electrode.* Journ. Am. Chem. Soc. vol. XXXIII, pp. 299-307; 1911.

[11]) LEWIS G. N. and RANDALL M., *Thermodynamics and the free energy of chemical substances* (Mc Graw Hill, New-York; 1923) p. 486.

Alla temperatura di 25°C la f. e. m. della pila sarebbe dunque:

$$\eta = \eta_a - \eta_c = 2{,}173. \qquad (12)$$

Si può sostituire questo valore nella formula di GIBBS-HELMOLTZ, tenendo conto che l'ammontare del primo termine a secondo membro è già dato dalla (9), e quindi scrivere:

$$2{,}173 = 2{,}333 + 298^{0}2\frac{d\eta}{dT}$$

donde si trae:

$$\frac{d\eta}{dT} = -0{,}00053. \qquad (13)$$

La formula di GIBBS ed HELMOLTZ, per il caso che ci interessa, si riduce a

$$\eta = 2{,}333 - 0{,}00053\ T. \qquad (14)$$

Calcolo di σ.

Ci possiamo avvalere dei dati di STENDER, ZIVOTINSKY e STROGANOFF, i quali hanno misurato una serie di valori del potenziale complessivo degli elettrodi funzionanti sotto varie densità di corrente nelle condizioni di marcia degli elettrolizzatori a diaframmi filtranti per cloruro sodico [12]). I loro valori si riferiscono, per quanto riguarda l'anolita, a soluzioni contenenti 260 g/L di NaCl e, per quanto riguarda il catolita, a soluzioni con vario grado di decomposizione a partire dalla soluzione satura di cloruro.

La concentrazione prescelta dall'anolita è sensibilmente inferiore a quella di una salamoia satura, quale si adopera per alimentare l'apparecchio; ma è giustamente scelta perchè è quella che, nelle condizioni di regime, si ritrova nel compartimento anodico. La ragione di questa differenza emerge chiara quando si considerano in dettaglio i fenomeni dovuti alla migrazione degli joni, come è stato fatto da GIORDANI nello studio sugli elettrolizzatori a diaframma [13]).

Si è in quella sede mostrato che il liquido catodico — quando non esista una circolazione indipendente dall'anolita — deve avere una composizione strettamente collegata a quella della salamoia alimentatrice, dovendosi ritrovare nell'effluente: le molecole di NaCl immodificate, quelle di NaOH ottenute per caustificazione e tutta l'acqua meno quella utilizzata nella reazione chimica. D'altra parte — in conseguenza dei fenomeni di migra-

---

[12]) loc. cit. in [2]), pp. 193 e 198.

[13]) loc. cit. in [1]), pp. 22 e segg.

zione — ad una determinata salamoia alimentatrice corrisponde un liquido anodico più diluito ed un liquido catodico più concentrato e ciò in misura tanto maggiore per quanto più elevato è il titolo alcalino del catolita.

Nel caso particolare che ci interessa si può fare un calcolo di prima approssimazione nel modo seguente.

Nell' elettrolizzatore a diaframmi filtranti la composizione dell'effluente catodico, ottenuto a partire da una salamoia alimentatrice praticamente satura di NaCl, è data dalla formula:

$$C_1 = 5{,}261 - 0{,}816\, C_2 \qquad (15)$$

dove C_1 indica la concentrazione equivalente del cloruro che rimane indecomposto quando l'alcali ha raggiunto la concentrazione equivalente C_2.

Nell'elettrolizzatore a diaframmi con liquidi stazionari, la composizione del catolita è data dalla seguente formula:

$$C_1 = C_0 - 0{,}519\, C_2 \qquad (16)$$

dove C_0 sta ad indicare la concentrazione iniziale della salamoia che si adopera. Partendo egualmente da una salamoia satura ($C_0 = 5{,}261$) il confronto delle due formule (15) e (16) indica che, nell'elettrolizzatore a liquidi stazionari, la concentrazione molecolare totale del catolita è più alta di quella che si avrebbe nell'elettrolizzatore a diaframmi filtranti e ciò perchè il gioco dei fenomeni di migrazione porta ad un arricchimento della zona catodica a spese del liquido contenuto nella zona anodica, liquido che si impoverisce di sale. La differenza è tanto maggiore per quanto maggiore è C_2.

In altre parole l'effluente catodico di un apparecchio a diaframmi filtranti è eguale a quello che si avrebbe in un apparecchio a liquidi stazionari che fosse alimentato con una salamoia a concentrazione iniziale C_0, sensibilmente più bassa.

Ma poichè i fenomeni di migrazione rimangono parimenti in atto in entrambi i casi, si deve determinare nell'apparecchio a diaframmi filtranti una condizione di regime tale per cui, alimentando dall'esterno con salamoia satura, la zona catodica lascia fluire una catolita corrispondente a gradi più o meno elevati di decomposizione di quella salamoia, mentre la zona anodica contiene un liquido che è tanto più lontano dalla saturazione per quanto più alto è il titolo alcalino C_2 dell' effluente catodico, cioè per quanto più alto è il grado di decomposizione.

Per calcolare questa concentrazione salina, che a regime si ha nel comparto anodico, si può procedere con sufficiente approssimazione nel modo che segue: con la formula (15) si calcola la concentrazione C_1 corrispondente ad un determinato titolo caustico C_2 dell'effluente catodico, si sostituiscono entrambi questi valori C_1 e C_2 nella (16) e la si risolve poi

rispetto a C_0. Il valore così ottenuto è la cercata concentrazione salina dell'anolita, cioè quella che — a regime — fa fronte al catolita fluente soddisfacendo al complesso gioco dei fenomeni di migrazione jonica.

Nel caso particolare che ci interessa, $C_2 = 3$ e quindi, dalla (15), $C_1 = 2{,}813$: sostituiti detti valori nella (16) si ha:

$$C_0 = 2{,}813 + (3 \times 0{,}519) = 4{,}370$$

Si calcola così che, nelle condizioni di regime, l'anolita debba contenere 255,8 g/L di NaCl, il che coincide sufficientemente con il valore trovato da Stender e collaboratori e con quello da noi correntemente riscontrato per gli elettrolizzatori del tipo Giordani-Pomilio.

Stender, Zivotinsky e Stroganoff hanno eseguito misure con diversi materiali anodici ed a diverse temperature adoperando sempre una soluzione, come detto, con 260 g/L di NaCl. Quale unico materiale catodico è stata adoperata la lamiera di una cellula Vorce [14]), di provenienza americana, e si sono utilizzate soluzioni con diversi gradi di decomposizione a partire dalla salamoia satura ed alla sola temperatura di 70° *C*.

Per avere una completa serie di valori, abbiamo prescelto e raccolto nella tabella I i dati ε_1 ottenuti con anodi di grafite Acheson, interpolando per la temperatura di 70° *C*, e quelli ε_2 ottenuti con l'unico catodo di acciaio alla stessa temperatura, interpolando per il valore $C_2 = 3$. Nella tabella figurano anche i potenziali totali $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ e le sovratensioni $\sigma = \varepsilon - \eta_{70}$ alle diverse densità di corrente Δ, che sono espresse in A/mq.

Per definire il valore di η_{70} corrispondente alle date condizioni di lavoro, si tiene conto del potenziale di equilibrio dell'elettrodo a Cl_2 in una soluzione contenente 260 g/L di NaCl, alla temperatura di 25°: il coefficiente di attività è uguale a 0,8 e quindi $\eta_a = 1{,}327$. Per η_c si ha il valore già calcolato con la (11) e cioè $-0{,}852$, talchè,

$$\eta_{25} = 2{,}179$$

e — adottando il coefficiente di temperatura della (13) — si ottiene:

$$\eta_{70} = 2{,}156.$$

---

[14]) Kirkpatrick S. D., *Economies in producing chlorine and caustic soda.* Chem. Met. Engin., vol. XXXV, pp. 158-161; 1928.

TABELLA I.

Δ	ε_1	ε_2	ε	σ
100	1,34	1,20	2,54	0,39
200	1,37	1,22	2,59	0,44
300	1,40	1,25	2,65	0,50
400	1,42	1,26	2,68	0,53
500	1,44	1,28	2,72	0,57
600	1,46	1,29	2,75	0,60
700	1,47	1,31	2,78	0,63
800	1,48	1,32	2,80	0,65
900	1,49	1,33	2,82	0,67
1.000	1,50	1,34	2,84	0,69

Non è questa la sede per discutere in dettaglio il problema della sovratensione e le numerose formule che sono state proposte per rappresentarne la variazione al dariare di Δ [15]; accenneremo soltanto che ricerche, in corso in questo Istituto e tuttora inedite, conducono ad una formula del tipo:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{a\ \Delta}{1 + a\ \Delta} b \qquad (17)$$

D'altra parte abbiamo accennato che σ consta della somma di tre termini

$$\sigma = \gamma + \delta + \rho$$

di cui: γ si può ritenere, in prima approssimazione e salvo casi speciali, trascurabile; δ è indipendente dalla densità di corrente Δ; e ρ è una funzione di questa.

Si avrebbero quindi, quando si possa trascurare come nel caso che ci interessa la polarizzazione di concentrazione, le eguaglianze:

$$\delta = \sigma_0 \ ; \ \rho = \frac{a\ \Delta}{1 + a\ \Delta} b;$$

per le quali la precedente formula (17) diventa:

$$\sigma = \delta + b\ \frac{a\ \Delta}{1 + a\ \Delta} \qquad (18)$$

[15]) Vedasi un interessante rapporto riassuntivo: WIRTZ K., *Ueberspannung und Mechanismus der elektrolytischen Wasserstoffabscheidung.* Zeit. f. Elektroch., vol. XLIV, pp. 303-326; 1938.

Dai valori di σ contenuti nell'ultima colonna della tabella I, si calcolano col metodo dei minimi quadrati i coefficienti della (17) e si trova:

$$\sigma_0 = 0{,}326 \quad ; \quad a = 0{,}00091 \quad ; \quad b = 0{,}763.$$

Si perviene così alla formula:

$$\sigma = 0{,}326 + \frac{0{,}00091\ \Delta}{1 + 0{,}00091\ \Delta}\ 0{,}763 \qquad (19)$$

TABELLA II.

Δ	σ	
	calc.	oss.
100	0,389	0,39
200	0,443	0,44
300	0,488	0,50
400	0,529	0,53
500	0,564	0,57
600	0,596	0,60
700	0,623	0,63
800	0,647	0,65
900	0,669	0,67
1.000	0,689	0,69

Manca una parte dei dati per studiare l'andamento di σ al variare della temperatura. È noto bensì che l'ammontare della sovratensione diminuisce al crescere di quella; ma non è ancora possibile di discriminare quanta parte della diminuzione competa al termine fisso σ_0 e quanta al termine variabile: tutto lascia prevedere però che entrambi i termini risentano l'influenza della temperatura ed in tale senso si possono interpretare alcuni dei nostri risultati, che esporremo in seguito.

Calcolo di R I.

In un elettrolizzatore, del tipo qui considerato, la caduta ohmica complessiva consta di vari termini, e cioè:

a) la caduta negli anodi di grafite;
b) la caduta nell'elettrolita anodico;
c) la caduta nel diaframma;
d) la caduta nell'elettrolita catodico;
e) la caduta nel catodo di lamiera di acciaio.

Di regola il diaframma è in aderenza così intima con il catodo, che il quarto termine si può trascurare. Lo stesso dicasi della caduta nel catodo metallico che, per ragioni meccaniche, ha sempre una sezione esuberante. Restano da considerare soltanto i termini *a*) *b*) e *c*).

Nella pratica si deve tener conto anche delle cadute di tensione ai contatti e di quelle di linea; ma sono questi fattori che escono dal quadro del nostro studio.

Il primo termine si calcola abbastanza facilmente facendo qualche ipotesi semplificativa sulla ripartizione della corrente, per la parte degli elettrodi che resta immersa nel liquido. Si immagina cioè che questa sia suddivisa in n settori successivi, ognuno dei quali abbandoni verso l'elettrolita $\frac{1}{n}$ della corrente: al limite, per n sufficientemente grande, la resistenza opposta è uguale a quella di un elettrodo di metà altezza che sia tutto attraversato dalla totalità della corrente. Se la cellula ha N anodi di grafite di sezione s, ognuno dei quali sia munito di una testa per l'adduzione della corrente, di sezione τ e di lunghezza 1, e se la parte non immersa dell'elettrodo ha la lunghezza l_1, mentre la parte immersa ha la lunghezza l_2; la resistenza totale sarà:

$$R_1 = \frac{\rho\, 1}{N\tau} + \frac{\rho\, l_1}{Ns} + \frac{\rho\, l_2}{2Ns} \qquad (20)$$

dove ρ è la resistività della grafite.

La caduta di tensione nell'elettrolita si può calcolare ammettendo che esso abbia composizione uniforme, tenuto conto della energica agitazione provocata dallo svolgimento gassoso. Stender, Zivotinsky e Stroganoff [16]) hanno mostrato che il calcolo si esegue molto bene avvalendosi dei dati conduttometrici per il cloruro sodico forniti da Giordani e Maresca. Occorre soltanto definire la sezione media S_m dell'elettrolita, in quanto di regola la superficie anodica e quella catodica non sono uguali; ma con forme costruttive semplici il problema non presenta gravi difficoltà.

Nella maggioranza dei casi le superfici degli elettrodi si presentano parallele ed a distanza non grande, di talchè si può porre

$$S_m = \frac{S_a + S_c}{2};$$

se con S_a ed S_c si indicano rispettivamente le superfici anodiche e catodiche. Mentre non possono ordinariamente sorgere dei dubbi circa l'ammontare di S_c; diverso è il caso per S_a giacchè gli anodi hanno spessore non piccolo e quindi c'è da attendere un contributo da parte delle loro

---

[16]) loc. cit. in [2]), pp. 199 e 201.

superfici laterali. Più incerta ancora è la valutazione dell'effetto di spalla quando gli anodi lavorano su di una sola faccia o perchè se ne abbiano due file in un quadro di forma parallelepipeda come nelle cellule Allen-Moore [17]) o perche essi siano disposti circolarmente in una camera anodica cilindrica, come nella cellula Vorce [18]).

Per gli elettrolizzatori del tipo da noi studiato, dove si ha una sola fila di elettrodi molto ravvicinati tra di loro, è lecito ritenere che sia efficace soltanto la superficie degli anodi prospiciente al catodo, e quindi scrivere:

$$R_1 = \frac{2\,d}{\varkappa\,(S_a + S_c)} \qquad (21)$$

dove $\varkappa$ è la conduttività dell'anolita alla temperatura che si considera e d lo spessore dell'elettrolita.

Per calcolare la resistenza opposta dal diaframma occorre tener conto del suo spessore e della sua porosità, elementi sempre mal definiti, ed occorre anche considerare che esso è permeato di liquido anodico entro il quale diffonde certamente una parte del catolita.

Le difficoltà si attenuano se ci si contenta di conoscere quello che avviene all'inizio della marcia, perchè in tale stadio non ci si allontana molto dal vero assumendo in media una porosità di 0,5 ed uno spessore eguale a quello del materiale bagnato [19]); attesa poi la piccolezza di questo spessore iniziale e quindi la piccolezza del termine che qui si considera, rispetto a tutti gli altri, non si sbaglia di molto ammettendo che tutto il diaframma sia imbevuto di un liquido avente composizione eguale all'anolita.

Designando con π la porosità del diaframma, con S_c la sua superficie, che è sempre uguale a quella del catodo, con D lo spessore del materiale asciutto e con $D' = \varphi D$ lo spessore del materiale inzuppato di anolita; si può valutare, con sufficiente approssimazione, la resistenza iniziale R_3, ponendo:

$$R_3 = \frac{\varphi\,D}{\varkappa\,\pi\,S_c}; \qquad (22)$$

---

[17]) Moore H. K., *The fundamentals of the electrolytic diaphragm cell.* Chem. Met. Engin., vol. XXIII, pp. 1011-15, 1072-74, 1125-28; 1920.

[18]) Vedasi la descrizione in loc. cit. a [14]) e gli espedienti adottati da Stender e collaboratori per dedurre un valore medio in varie ipotesi (loc. cit. in [2]), p. 211, tabella XII).

[19]) Giordani F., *Sul funzionamento degli elettrolizzatori a diaframma e circolazione per cloruri alcalini.* Nota II. Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. della Soc. Reale di Napoli, s. 3ª, vol. XXVII, pp. 249-60; 1921. Vedasi anche: Stender W. W., *Asbestos diaphragms.* Trans. Electroch. Soc., vol. LXXVII, pp. 51-70; 1935.

accettando poi per π il valore di 0,5 e per D' il doppio dello spessore del diaframma asciutto, si ha:

$$R_3 = \frac{4\,D}{\varkappa\, S_c} \qquad (22').$$

Le cose si complicano però in modo notevole a misura che il diaframma invecchia durante il funzionamento, avendosi nello stesso tempo un aumento dello spessore ed una diminuzione di porosità, che non sono precisabili; ed è proprio quì che interesserebbe di procedere alla misura diretta della resistenza interna dell' elettrolizzatore.

Purtroppo, come abbiamo accennato al principio di questa nota, i tentativi finora compiuti per la misura diretta di R non hanno condotto a risultati soddisfacenti, in quanto si riesce a misurare una caduta Δv, uguale alla somma di RI e di un altro termine che fa parte della sovratensione, come è indicato nella formula (5).

Tuttavia le misure eseguite con lo speciale apparecchio costruito allo scopo, anche se non permettono la precisa conoscenza dei valori di R, forniscono una serie di dati molto interessanti per lo studio, che è oggetto di questa nota, e saranno quì di seguito brevemente illustrate.

Per quanto riguarda il calcolo ci limiteremo a considerare le condizioni iniziali adottando per R la somma dei tre termini R_1, R_2 ed R_3 che risultano dalle formule (20), (21) e (22).

Scriveremo perciò:

$$RI = \left\{ \frac{\rho\ 1}{N\tau} + \frac{\rho}{N\,s}\left(1_1 + \frac{1_2}{2}\right) + \left[\frac{2\,d}{(S_a + S_c)} + \frac{4\,D}{S_c}\right]\frac{1}{\varkappa} \right\} \mathrm{I} \qquad (23)$$

PARTE SPERIMENTALE

Le nostre misure sono state eseguite su elettrolizzatori Giordani-Pomilio, del tipo normale marcianti a 3.000 A, per gentile concessione della S.A. Cellulosa Cloro Soda di Napoli e della S.A. Cellulosa d'Italia (stabilimento di Chieti).

Questi elettrolizzatori [20]) sono muniti di 12 anodi di 190×75 mm di sezione e di 1.100 millimetri di altezza, immersi per 890 mm: su ognuno degli anodi sono infisse due teste cilindriche per l'adduzione della corrente, le quali hanno 65 mm di diametro e 280 mm di altezza. Gli anodi sono disposti in unica fila, molto ravvicinati, lavorano sulle due facce e sono racchiusi tra due catodi di 930×3.170 mm.

I catodi, disposti parallelamente e coperti dai diaframmi, sono appog-

[20]) Per la descrizione e disegni costruttivi, ved. loc. cit. in [1]), p. 66.

giati ad un quadro di 140 mm di spessore, talchè lo spessore d di elettrolita interposto, quando i diaframmi sono nuovi, è di

$$\frac{140 - 75}{2} = 32{,}5 \text{ mm.}$$

I diaframmi sono costituiti da cartoni di amianto dello spessore di 1,5 mm.

Si ha quindi la seguente tabella di valori:

N	= 12		S_a	= 40.584	cmq
1	= 28	cm	S_c	= 58.962	cmq
τ	= 66,3	cmq	S_m	= 49.773	cmq
l_1	= 21	cm	d	= 3,25	cm
l_2	= 89	cm	D	= 0,15	cm
s	= 142,5	cmq			

Con la marcia a 3.000 A, le densità di corrente agli elettrodi risultano:

$$\Delta_c = \frac{3.000}{5{,}84} = 509 \text{ A/mq}$$

$$\Delta_a = \frac{3.000}{4{,}06} = 739 \text{ A/mq}$$

Dalla tabella I si deducono, in corrispondenza di questi valori di Δ, e per la temperatura di 70°, le seguenti tensioni:

ε_2	1,28
ε_1	1,47
ε	2,75

Col procedere del tempo la parte immersa della grafite si consuma più o meno regolarmente e — dal punto di vista della resistenza meccanica — può essere conservata negli apparecchi ad elettrodi verticali fino a quando lo spessore ha raggiunto 1 cm circa: questa riduzione di sezione influisce, come vedremo, sulla caduta ohmica.

I blocchi parallelepipedi degli anodi, montati durante le nostre esperienze, provenivano dalla S.A. Elettrografite di Forno Allione, e per essi avevamo già determinato, in occasione di altri studi, il valore medio della resistività $\rho = 9,8\ \Omega$ cm [21]; valore che nei limiti di approssimazione di

[21]) Jacopetti M. M., *L'attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini.* Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. della Soc. Reale di Napoli; s. 4ª, vol. X, pp, 180-93; 1939-40.

queste ricerche si può considerare indipendente dalla temperatura. L'anolita, come già detto, nella marcia di regime con $C_2 = 3$, contiene 260 g/L e la sua conduttività si esprime con la formula [22]):

$$\varkappa = 0{,}1257\ (1 + 0{,}03374\ t + 0{,}00006306\ t^2) \qquad (24)$$

Lo spessore d dell'elettrolita cresce a misura che si consumano gli anodi [23]) e — quando questi si sono ridotti allo spessore di 1 cm — raggiunge il valore

$$\frac{14 - 1}{2} = 6{,}5 \text{ cm.}$$

I valori di ε, che abbiamo precedentemente riportati, si riferiscono alla marcia sotto 3.000 A. Essi variano con la densità della corrente ed, in base alla conoscenza delle superfici elettrodiche ed ai dati raccolti nella tabella I, si possono dedurre i valori di ε per le varie intensità di corrente a cui si marcia: così, per esempio, sotto 2.500 A si avrebbe $\varepsilon = 2{,}71$.

Viceversa il valore della tensione di saturazione E_s — misurata con il nostro metodo fotografico come differenza $v - \Delta v$ — deve risultare indipendente da Δ ed eguale alla somma del potenziale di equilibrio η e della parte non variabile, δ, della sovratensione. Per la temperatura di 70°, risulterebbe

$$E_s = 2{,}156 + 0{,}326 = 2{,}482.$$

Al crescere della temperatura ε deve diminuire, in quanto diminuisce σ e deve diminuire anche E_s se la diminuzione di σ si ripartisce tra i due termini ρ e δ, come apparrebbe dalle nostre misure.

Sostituendo i valori numerici, relativi all'elettrolizzatore sottoposto a prova, nella formula (23); si calcola la caduta ohmica $R\,I$. Per una cellula nuova si ha:

$$R\,I = \left(0{,}720 + \frac{0{,}800}{\varkappa}\right) 10^{-4}\ I \qquad (25)$$

In un elettrolizzatore con diaframmi nuovi. ma con anodi consumati fino allo spessore di 1 cm; si hanno gli stessi valori di resistenza per le teste degli anodi, per la parte non immersa di essi e per il diaframma.

---

[22]) Per interpolazione delle formule contenute nella nota cit. in [3]), p. 887.

[23]) Per il comportamento anodico delle grafiti, vedi la nota cit. in [2]) ed una seconda nota sullo stesso argomento: Ibid. s. 4ª, vol. XI, pp. 30-39; 1940-41.

Viceversa la resistenza della parte immersa degli anodi deve valutarsi per una sezione di 19 invece che di 142,5 cmq, mentre quella dell'elettrolita deve valutarsi, come abbiamo visto, per uno spessore $d = 6{,}5$ cm.

Sostituendo nella (23) questi nuovi valori di s e di d al posto dei precedenti, si ha:

$$R\,I = \left(2{,}377 + \frac{1{,}408}{\varkappa}\right) 10^{-4}\, I \qquad (26)$$

La caduta ohmica diventa molto più elevata, cioè circa 2,5 maggiore di quella corrispondente ad una cellula nuova che marcia alla stessa temperatura: il che mostra che è buona pratica di non ridursi a queste condizioni limite.

Nello stabilimento di Napoli si è messo sotto prova un elettrolizzatore nuovo del tipo descritto, iniziando la marcia il 21 agosto 1939. L'apparecchio è stato tenuto senza interruzione sotto controllo per 151 giorni fino al 19 gennaio 1940. Si sono rilevati periodicamente la temperatura, l'intensità della corrente I, la tensione totale v agli elettrodi, la caduta istantanea Δv all'interrompersi del circuito e, partendo da questi dati, si è proceduto al calcolo della tensione di saturazione $E_s = v - \Delta v$, nonchè della resistenza apparente.

$$R_a = \frac{\Delta v}{I}\,.$$

Dati e risultati figurano nella tabella III.

Evidentemente R_a deve essere maggiore della resistenza effettiva R in quanto Δv, comprende anche la parte ρ della sovratensione variabile con la densità di corrente.

Dai dati della tabella III si vede che la tensione totale v diminuisce nei primi giorni di marcia in modo regolare, partendo da un valore iniziale di 4,19 volt, fino a raggiungere un minimo di 3,73 volt (prova XIV), attorno al quale si mantiene per una quindicina di giorni, dopo di che ricomincia a crescere. In corrispondenza del minimo di v si nota anche un valore minimo di Δv (1,22 volt) e di R_a ($4{,}2 \cdot 10^{-4}\,\Omega$).

L'interpretazione delle esperienze è complicata dalle variazioni di temperatura che si hanno durante la marcia e che sono dovute alla maggiore quantità di calore che si dissipa a misura che i diaframmi invecchiano provocando un aumento di resistenza. Dallo inizio alla fine della prova — pur essendo passati dalla temperatura ambiente di piena estate a quella di pieno inverno — si è constatato un aumento di temperatura di circa 20° C. Elettrolizzatori con diaframmi vecchi funzionanti in piena estate,

specialmente se con anodi molto consumati, possono raggiungere e superare — come vedremo — la temperatura di 80° *C*.

La temperatura influisce sulla conduttività degli elettroliti e quindi sulla caduta ohmica, ma essa esercita anche una influenza sensibile sulla sovratensione e molto probabilmente sui due termini che la costituiscono.

TABELLA III.
(elettrolizzatore n. 86)

N.° prova	Data	I	t	v	Δv	$E_s = v - \Delta v$	$10^4 R_a$
I	21-VIII	2.900	42°	4,10	1,51	2,59	5,2
II		2.900	42°	4,05	1,49	2,56	5,1
V	22-VIII	2.900	50°	3,83	1,33	2,50	4,6
VI		2.900	50°	3,82	1,32	2,50	4,5
VII	23-VIII	2.900	50°	3,77	1,26	2,51	4,3
VIII	25-VIII	2.940	50°	3,76	1,29	2,47	4,4
XI	29-VIII	2.950	50°	3,75	1,29	2,46	4,4
XII		2.950	50°	3,74	1,25	2,49	4,2
XIII	1-IX	2.900	52°	3,74	1,24	2,50	4,3
XIV		2.900	52°	3,73	1,22	2,51	4'2
XV	28-IX	3.000	52°	3,92	1,45	2,47	4,8
XVI		3.000	52°	3,93	1,47	2,46	4,9
XVII	13-X	3.000	52°	3,97	1,51	2,46	5,0
XVIII		3.000	52°	3,96	1,51	2,45	5,0
XIX	26-X	3.000	60°	3,95	1,52	2,43	5,1
XX		3.000	60°	3.97	1;52	2,45	5,1
XXI	9-XI	3.000	60°	3,97	1,52	2,45	5,1
XXII		3.000	60°	3,97	1,52	2,45	5,1
XXIII	23-XI	3.000	61°	4,07	1,62	2,45	5,4
XXIV		3.000	61°	4,06	1,62	2,44	5,4
XXV	20-XII	3.000	60°	4,18	1,76	2,42	5,9
XXVI		3.000	60°	4,20	1,79	2,41	6,0
XXVII	19-1-40	2.825	60°	4,33	1,90	2,43	6,7

Per un elettrolizzatore con diaframmi nuovi, servendosi delle formule (24) e (25) si possono calcolare le resistenze R alle temperature che ci interessano, e le corrispondenti cadute ohmiche per le correnti di 2.900 e di 3.000 *A*. Tali valori figurano nella tabella IV e da essi si vede che — passando dalla temperatura della prima prova (42°C) a quella della XIV prova (52°C) quando si registra il minimo di v — si dovrebbe avere, per effetto

della sola conduttanza una diminuzione di tensione dell'ordine di nn decimo di volt. La diminuzione osservata è di ben 0,37 volt di cui 0,29 sono a carico di Δv e 0,08 restano a carico della tensione di saturazione E_s.

Probabilmente in questo periodo di avviamento giocano altri fattori difficilmente controllabili ed è perciò opportuno assumere i valori della XIV prova come quelli iniziali in condizioni di regime. Resta però il fatto che, al crescere della temperatura c'è una diminuzione molto sensibile della sovratensione, che si suddivide in parte a favore di Δv ed in parte a favore di E_s.

La caduta istantanea Δv viene così a comprendere due termini entrambi variabili con t e con I, che è difficile discriminare.

Invece E_s comprende due termini, entrambi indipendenti da I, e di cui uno (η) ha una legge nota di variazione con t. Conviene quindi esaminarne più da vicino il comportamento.

Anzi è necessario in primo luogo di controllare se effettivamente si verifica che E_s, misurato come differenza tra v e Δv, risulta indipendente dalla densità di corrente: in altri termini se effettivamente E_s comprende una parte della sovratensione che non viene a mancare istantaneamente con la corrente e che non dipende da Δ.

TABELLA IV.

t	$\varkappa$	$R \cdot 10^4$	2.900 R	3.000 R
42°	0,318	3,23	0,94	0,97
50°	0,357	2,96	0,86	0,89
52°	0,367	2,90	0,84	0,87
60°	0,409	2,68	0,78	0,80
75°	0,488	2,36	0,68	0,71
83°	0,532	2,22	0,67	0,64

Perciò abbiamo eseguito delle prove a densità di corrente ridotta il 21 agosto, ripetendole poi alla data del 29 agosto, cioè quando si era prossimi a quel valore minimo di v, che abbiamo considerato come indice di un raggiunto regime regolare. In entrambi i casi le prove sono state eseguite inserendole rapidamente nella marcia normale in modo da non alterare le condizioni di lavoro. I risultati ottenuti figurano nella tabella V.

TABELLA V.

N.° prova	Data	I	$t°$	v	Δv	$E_s = v - \Delta v$	$10^4 R_a$
III	21-VIII-1939	2.510	42°	3,77	1,21	2,56	4,8
IV	21-VIII-1939	2.510	42°	3,76	1,21	2,55	4,8
IX	29-VIII-1939	2.500	51°5	3,58	1,11	2,47	4,4
X	29-VIII-1939	2.500	51°5	3,58	1,11	2,47	4,4

Il valore medio delle prove III e IV (2,555) coincide con quella della prova II immediatamente prossima ed alla stessa temperatura, laddove si registra $E_s = 2{,}56$; il valore medio delle prove IX e X di 2,47 volt si inserisce perfettamente tra i valori delle prove VIII e XI, tra cui quelle sono intercalate.

Per completare le indagini circa l'influenza della temperatura su E_s, valgono i risultati di alcune prove eseguite, sempre nell'agosto 1939, su due vecchi elettrolizzatori i quali avevano resistenze molto elevate e quindi alte temperature di regime.

Il primo di questi elettrolizzatori (n. 45) era stato rimontato il 5 dicembre 1938 e marciava quindi da più di otto mesi: mentre il secondo (n. 46) era stato avviato il 13 dicembre, dopo il solo cambio dei diaframmi, avendo conservato in opera anodi già usati.

I risultati delle misure figurano nella tabella VI.

TABELLA VI.

N.° elettr.	Data	I	t	v	Δv	$E_s = v - \Delta v$	$10^4 R_a$
45	17-VIII-39	2 800	75°	4,25	1,86	2,39	6,4
45	18-VIII-39	2.900	75°	4,28	1,89	2,39	6,5
46	17-VIII-39	2.900	83°	5,07	2,72	2,35	9,4
46	18-VIII-39	2.880	83°	5,11	2,76	2,35	9,6

Se dalle tabelle III, IV e V si desumono i valori medi di E_s per le varie temperature, si ha:

$t = 42°$	$E_s = 2{,}56$
$50°$	$2{,}50$
$52°$	$2{,}48$
$60°$	$2{,}44$
$75°$	$2{,}39$
$83°$	$2{,}35.$

L'andamento abbastanza regolare di questi valori, rilevati su apparecchi diversi, corrobora l'ipotesi di una prevalente influenza della temperatura. Interpolando per la temperatura di 70° si ha $E_s = 2{,}41$ contro il valore calcolato di 2,48 accordo soddisfacente se si pensa che il calcolo di E_s è stato fatto partendo da valori rilevati su materiali elettrodici diversi.

Facciamo in via incidentale una osservazione sull'influenza della temperatura ambiente. La prova XXVII sulla cellula n. 86 — eseguita in gennaio e per la quale si ha $\Delta v = 1{,}90$ — ha avuto luogo con una temperatura dell'apparecchio di 60°C; invece le prove sull'elettrolizzatore n. 45 con un Δv medio di 1,87 volt, effettuate in agosto, hanno avuto luogo con una temperatura dell'elettrolizzatore di 75°C. E ciò fa pensare che, anche nel mite clima napoletano, converrebbe forse di riscaldare la sala di elettrolisi durante l'inverno.

Infatti l'elettrolizzatore n. 45, andando verso l'estate ha impiegato otto mesi per raggiungere $\Delta v = 1{,}87$; mentre l'elettrolizzatore n. 86 — andando verso l'inverno — ha raggiunto un Δv lievemente più alto in soli cinque mesi.

Come abbiamo più volte accennato, non è ancora possibile per il momento di approfondire lo studio della caduta ohmica e quindi di vedere come varia RI con l'invecchiamento del diaframma. Per l'elettrolizzatore n. 86 (tabella III) la resistenza apparente R_a passa da un valore minimo di 0,00042 Ω ad uno finale di 0,00067 Ω; la differenza di 0,00025 Ω che si osserva è certo minore di quella effettivamente dovuta all'invecchiarsi del diaframma, in quanto una parte di essa risulta mascherata dall'aumento di temperatura che interviene certamente a fare aumentare $\varkappa$ e quasi certamente anche ad attenuare il valore di δ,

La resistenza del solo diaframma si calcola con la formula $(\frac{22}{VI})$ la quale, per l'apparecchio da noi sperimentato ed alla temperatura di 52°, diventa:

$$R_s = \frac{0{,}15}{0{,}367 \times 58.962} \frac{\varphi}{\pi}. \qquad (27)$$

All'inizio poniamo $\frac{\varphi}{\pi} = \sim 4$ e quindi $R_s = \sim 0{,}000027\ \Omega$; al termine delle esperienze questo valore iniziale è cresciuto per lo meno di altri 0,00025 Ω, cioè si è all'incirca decuplicato. Bisogna quindi ritenere che, alla fine della vita del diaframma, il rapporto $\frac{\varphi}{\pi}$ diventi circa dieci volte mag-

giore e, poichè la porosità può variare di poco, ne segue che il diaframma deve aumentare di spessore.

Questo appariscente fenomeno si constata nella pratica tutte le volte che si procede alla revisione degli elettrolizzatori: si trova che la polvere di grafite e gli idrossidi dei metalli alcalino-terrosi fissati sul diaframma, il quale inizialmente aveva uno spessore di 1,5 mm., hanno formato un conglomerato che raggiunge talvolta lo spessore di qualche centimetro.

Esaminiamo ora l'influenza esercitata dal graduale consumo degli elettrodi di grafite. Servendoci della formula (26) calcoliamo i valori della tabella VII, relativi alle resistenze ed alle cadute ohmiche per varie temperature, di elettrolizzatori con diaframmi nuovi e con anodi consumati.

TABELLA VII.

t	$\varkappa$	$10^4 R$	$2.900\,R$	$3.000\,R$
42°	0,318	6,8	1,97	2,04
50°	0,357	6,3	1,83	1,89
60°	0,409	5,8	1,68	1,74
75°	0,488	5,3	1,54	1,57
83°	0,532	5,0	1,45	1,50

Se all'ultimo valore di R, che vale per la temperatura di 83° con diaframma nuovo, portiamo un aumento di 0,00025 almeno per l'invecchiamento del diaframma, giungiamo a prevedere una resistenza totale di 0,00075 Ω, che sta bene al confronto del valore medio di 0,00095 che si misura come resistenza apparente (vedi tabella VI).

Pur mancando quindi la possibilità della perfetta precisazione numerica, si segue abbastanza bene l'andamento qualitativo dei fenomeni.

Prima di chiudere vogliamo ancora svolgere qualche considerazione appoggiata ad altre misure da noi eseguite.

Nella parte introduttiva abbiamo accennato che, secondo il nostro modo di vedere circa i vari fattori che costituiscono la d. d. p. totale v, la tensione di saturazione E_s come da noi misurata dovrebbe coincidere con la tensione di decomposizione E_d.

Può essere interessante, nell'esercizio industriale, di misurare un valore medio di E_d per gli elettrolizzatori di una batteria eseguendo una serie di misure concomitanti di corrente e di tensione ed estrapolando poi per $I = 0$.

Le misure devono essere eseguite con grande rapidità in discesa fino a piccoli valori di I, ritornando poi in salita al valore iniziale in modo da essere sicuri che in tutte le misure non ci si sia di molto allontanati dalle condizioni di regime tanto nei riguardi della temperatura che delle concentrazioni dei liquidi.

Non è consigliabile ricercare per estrapolazione grafica il limite per $I = 0$; ma è conveniente di calcolare, col metodo dei minimi quadrati, i coefficienti di una formula trinomia:

$$V = A + BI + CI^2 \qquad (28)$$

dove V indica la d. d. p. totale applicata alla batteria ed I, al solito, l'intensità di corrente. Se la batteria comprende p elettrolizzatori, sarà:

$$V = pv \qquad \text{e} \qquad A = p E_d .$$

Nell'esercizio industriale la batteria comprenderà elettrolizzatori di varia età e quindi di varia temperatura, di talchè E_d sarà un valore medio, interessante da conoscere, anche come controllo di esercizio: in questo caso è da avvertire — contro quanto potrebbe sembrare a prima vista — che, valori eccessivamente bassi di E_d sono indice di cattivo funzionamento, dipendendo essi da temperature troppo alte e quindi da resistenze interne eccessive. Sono invece indice di buon funzionamento i valori bassi dei coefficienti B e C, perchè — confrontando la (28) con la (7″) — si vede che:

$$BI + CI^2 = p \Delta v$$

e quindi che la resistenza apparente è data da:

$$R_a = \frac{\Delta v}{I} = \frac{B + CI}{p} . \qquad (29)$$

Ai fini del nostro studio, volendo avere valori estremi di E_d, corrispondenti a basse ed alte temperature, abbiamo eseguito una serie di rilievi su di una batteria nuova, nello stabilimento di Chieti della S. A. Celdit, all'atto del collaudo; ed un'altra serie nello stabilimento di Napoli della S. A. Cellulosa Cloro Soda, su di una batteria con elettrolizzatori vecchi, dei quali molti con anodi consumati.

TABELLA VIII.
(Batteria di Chieti)

I	V	
	osserv.	calc.
0	—	109
840	127	127
910	129	129
1.110	135	134
1.320	140	139
1.570	146	145
1.870	152	152
2.170	161	160
2.500	172	168
3.000	182	182

TABELLA IX.
(Batteria di Napoli)

I	V	
	osserv.	calc.
0	—	109.8
1.120	148.6	148.7
1.260	154.0	153.8
1.782	174.2	173.4
2.240	189.5	191.2
2.308	194.6	193.9
2.500	202.8	201.6
2.940	219.2	219.6

Le tabelle VIII e IX racchiudono i dati delle due serie di misure e, nella ultima colonna, i valori di V calcolati rispettivamente con le due formule:

(Chieti) $$V = 108{,}98 + 20{,}98 \cdot 10^{-3} I + 1{,}117 \cdot 10^{-6} I^2 \qquad (30)$$

(Napoli) $$V = 109{,}85 + 33{,}09 \cdot 10^{-3} I + 1{,}446 \cdot 10^{-6} I^2 \qquad (31)$$

La batteria di Chieti comprendeva 45 elettrolizzatori e quella di Na-

poli 48, quindi le due formule (30) e (31) diventano:

$$\text{(Chieti)} \qquad v = 2{,}42 + 4{,}66 \cdot 10^{-4} I + 0{,}025 \cdot 10^{-6} I^2 \qquad (32)$$

$$\text{(Napoli)} \qquad v = 2{,}29 + 6{,}89 \cdot 10^{-4} I + 0{,}030 \cdot 10^{-6} I^2. \qquad (33)$$

I valori di E_d risultano: per la batteria nuova di 2,42 volt e per la batteria vecchia di 2,29 volt. Il primo è da confrontare con un valore di 2,48 per la temperatura di 50°C, ed il secondo con un valore di 2,37 per una temperatura di 80°.

Nei limiti di approssimazione delle misure eseguite, e, tenuto conto del fatto che si trascura nel confronto la polarizzazione di concentrazione, lo accordo è molto soddisfacente.

Le resistenze apparenti R_a risultano, come indica la formula (29), dipendenti da I. Per 3.000 A si ha: nel primo caso un valore di $5{,}41 \cdot 10^{-4}$ Ω, che coincide con quello dell'elettrolizzatore n. 86 dopo tre mesi di marcia; e nel secondo caso risulta $R_a = 7{,}79 \cdot 10^{-4}$, intermedio tra quelli misurati sui due vecchi elettrolizzatori 45 e 46.

Tutto quanto precede dimostra, tra l'altro, la notevole difficoltà di giungere ad una determinazione di E_d e di E_s e spiega l'incertezza dei pochi dati figuranti nella letteratura. Tra essi ricordiamo una vecchia misura di E_s, eseguita da Oettel [24]) con un galvanometro a torsione per lettura diretta dopo l'interruzione della corrente, giungendo al valoro di 2,3; ed una più recente di E_d, eseguita da Ramstetter e Kahn [25]), con una estrapolazione grafica di dati raccolti su cellule Billiter, a proposito della quale misura, gli autori dicono soltanto che avrebbe condotto ad un valore di $E_d = 2{,}30$ volt circa (« rund »).

I nostri valori, pur non essendo ancora completi, ci sembra portino un sensibile contributo alla conoscenza del problema, che abbiamo impreso a trattare.

Napoli, maggio 1942 - XX. Laboratorio di Elettrochimica della R. Università.

[24]) Oettel F., *Zur Electrolyse der Alkalichloride.* Chem. Zeit., vol. XVIII, pp. 69-70; 1894.

[25]) Ramstetter H. und Kahn O., *Energieausbeute und Zersetzungspannung bei der Elektrolyse von Natrium — und Kaliumchlorid Losungen.* Zeit. f. ang. Chemie, vol. XLI, pp. 610-11; 1931.

Sul prolungamento analitico.

Nota del prof. **Antonio Colucci**, *presentata dal socio* **R. Caccioppoli**

(Adunanza del dì 6 dicembre 1941-XX)

Sunto. — Si assegnano criteri per il prolungamento analitico di una funzione sopra un insieme perfetto, estendenti quelli noti di Painlevé.

1. Indichiamo con D ed I due insiemi limitati del piano complesso z, il primo aperto, il secondo perfetto, e supponiamo che $I < D$.

Sia $f(z)$ *una funzione olomorfa in* $D - I$ *e* $\frac{\textit{limitata}}{\textit{continua}}$ *in* I.

Se l'insieme I *è* $\frac{\textit{puntuale}}{\textit{semi-lineare}}$ [1] *la* $f(z)$ *riesce olomorfa in tutto* D.

Questi sono due noti teoremi di Painlevé [2], estendenti quello classico di Liouville circa l'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare.

Ai teoremi di Painlevé si possono sostituire due altri, forse più espressivi, ai fini di una larga generalizzazione che ci proponiamo di indicare. A ciò prendiamo l'insieme I e facciamo su di esso la costruzione di Cantor-Minkowski [3]: costruiamo cioè l'insieme dei cerchi di raggio ϑ con i centri nei punti dell'insieme dato. Denotiamo con $A(\vartheta)$ l'area della regione riempita da questi cerchi, e consideriamo i due casi seguenti:

$$\lim' \frac{A(\vartheta)}{\vartheta} = 0 \quad , \quad \lim' \frac{A(\vartheta)}{\vartheta} \equiv \text{numero finito} \neq 0.$$

Nel primo noi diciamo che l'insieme I ha *lunghezza nulla*, nel secondo *lunghezza finita*.

Premesso ciò dai teoremi di Painlevé discendono facilmente i seguenti:

Se $f(z)$ *è olomorfa in* $D - I$ *e* $\frac{\textit{limitata}}{\textit{continua}}$ *in* I, *e* I *ha lunghezza* $\frac{\textit{nulla}}{\textit{finita}}$, *la funzione si può prolungare analiticamente su* I, *cioè è olomorfa in* D.

---

[1]) Secondo Painlevé, un insieme è *puntuale* o *semi-lineare* secondo che, racchiuso l'insieme in un numero finito di aree aventi diametro minore di ε, la lunghezza complessiva dei contorni di queste aree si può far tendere a zero o restare limitata per $\varepsilon \to 0$.

[2]) Cfr. L. Zoretti, *Leçons sur le prolongement analytique* [Paris, (1911), p. 79-81].

[3]) Secondo Bouligand, cfr. il *Bulletin des Sciences Mathématiques*. T. 52 (1928).

[4]) Con $\lim' x$ indichiamo, con Picone, il minimo limite di x.

Vogliamo esaminare, in casi più generali per l'insieme I, quali ipotesi si può fare sulla funzione $f(z)$ perchè questa sia prolungabile analiticamente su I.

Cominciamo con l'introdurre la definizione di *ordine dimensionale* di I, mediante l'ordine di $A(\vartheta)$ rispetto a ϑ. Consideriamo:

$$\lim' \frac{A(\vartheta)}{\vartheta^p}$$

dove p denota un numero compreso fra 0 e 2. Se tale minimo limite è finito e diverso da zero, l'insieme è di *ordine dimensionale* $2-p$; se invece è nullo, l'insieme è di *ordine dimensionale minore di* $2-p$.

Lo scopo di questo lavoro è di determinare delle condizioni sufficienti per il prolungamento di $f(z)$ per $0<p<1$ e per $1<p<2$. Per fare ciò ci varremo, in quello che segue, dell'integrale di Cauchy esteso ad opportuni contorni racchiudenti l'insieme I.

2. Consideriamo gli insiemi frontiera degli insiemi ottenuti da I con la costruzione di Cantor-Minkowski. Diciamo $J(\vartheta)$ l'insieme ottenuto con la costruzione di raggio ϑ, $C(\vartheta)$ la sua curva frontiera e $L(\vartheta)$ la lunghezza di questa. Abbiamo evidentemente:

$$\text{area } J(\vartheta) = A(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} L(\vartheta)\, d\vartheta.$$

L'ordine dimensionale di I sia $2-p$ con $p>1$.

Dico che si deve poter determinare un $m>0$ e un ϑ' piccolo a piacere tali che

$$\frac{L(\vartheta')}{\vartheta'^{p-1}} < m.$$

Infatti, se per ogni M da un certo punto in poi si avesse:

$$\frac{L(\vartheta)}{\vartheta^{p-1}} > M$$

seguirebbe

$$\frac{A(\vartheta)}{\vartheta^p} > \frac{M}{\vartheta^p} \int_0^{\vartheta} \vartheta^{p-1}\, d\vartheta = \frac{M}{p}$$

il che è in contrasto col fatto che il minimo limite di $\frac{A(\vartheta)}{\vartheta^p}$ è finito.

Su $f(z)$ facciamo l'ipotesi che

$$|f(z)|\,\delta^{p-1} \to 0 \text{ per } \delta \to 0$$

δ essendo qui la distanza del punto z dall'insieme I.

Si ha:

$$\left|\int_{C(\delta')} f(z)\,dz\right| \leq L(\delta')\,|f(z')| < m\,|f(z')|\,\delta'^{p-1}.$$

L'integrale tende a zero con δ', perciò la $f(z)$ risulta olomorfa anche su I [5]).

Se, invece, facciamo l'ipotesi che l'ordine dimensionale di I sia minore di $2-p$, basterà per assicurare il prolungamento analitico di cui sopra, che il prodotto $|f(z)|\,\delta^{p-1}$ si mantenga limitato.

La dimostrazione si fa come innanzi, con m piccolo a piacere.

3. Supponiamo ora che l'ordine dimensionale di I sia $2-p$ con $p<1$, e indichiamo con δ un valore piccolo a piacere per cui

$$\frac{A(\delta)}{\delta^p} < \mu \text{ fisso.}$$

Con il ragionamento di prima si vede che esiste un δ' compreso fra $\frac{\delta}{2}$ e δ per cui

$$L(\delta')\,\delta'^{1-p} < m \qquad (m \text{ opportunamente scelto})$$

Dividiamo il piano in tante strisce di larghezza δ'. In ogni striscia contenente punti dell'insieme $J(\delta)$ esisterà un'opportuna sezione parallela dell'insieme — diciamo λ_r la sua lunghezza — tale che

$$A(\delta) \geq (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots)\,\delta'.$$

Allora siccome

$$\frac{A(\delta)}{\delta'^p}$$

è limitato, sarà anche limitato il prodotto

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots)\,\delta'^{1-p},$$

e quindi $\Sigma\lambda$ soggiace ad una limitazione analoga a quella di $L(\delta')$.

---

[5]) La dimostrazione è la stessa che per il teorema di PAINLEVÉ (cfr. *Zoretti*, loc. cit. pag. 80).

Mediante le rette che producono le divisioni λ dividiamo l'insieme $J(\mathfrak{d}')$ in tante porzioni con contorni di lunghezze $L_1, L_2, \ldots$ Si avrà:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots < L(\mathfrak{d}') + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots).$$

Perciò

$$L\ \mathfrak{d}'^{1-p}$$

è limitato da un certo numero fisso N.

Questa costruzione si può ripetere su ognuno dei campi ottenuti relativamente alla direzione normale alla precedente. Si viene così a scomporre l'insieme $J(\mathfrak{d}')$ in tante porzioni J_r di contorni γ_r, aventi lunghezza s_r tali che

$$\Sigma s_r \mathfrak{d}'^{1-p} < k$$

essendo k un numero fisso.

Si osservi che ogni porzione J_r è contenuta in un quadrato di lato $2\mathfrak{d}'$. Consideriamo un qualunque contorno γ racchiudente l'insieme I. Supposto $f(z)$ continua si ha:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots$$

Prendiamo in esame l'integrale esteso a γ_1. Diciamo z_1 un punto di I interno a questo contorno, e osserviamo che ovviamente:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} [f(z) - f(z_1)]\,dz$$

Supponiamo ora che $f(z)$ sia non solo continua, ma verifichi la relazione:

$$\frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|^{1-p}} \to 0$$

per h tendente a zero e z variabile su I [6]). Allora noi possiamo supporre che

$$\frac{|f(z) - f(z_1)|}{\mathfrak{d}'^{1-p}} < \varepsilon,$$

purchè $\mathfrak{d}'$ sia abbastanza piccola.

---

[6]) Ciò che si può esprimere dicendo che la funzione $f(z)$ soddisfa ad una condizione di Hölder con esponente maggiore di $1-p$, ossia di esponente $1-p+0$.

Segue:

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots} f(z)\,dz < \Sigma s_r . \varepsilon . \vartheta'^{1-p} < k\varepsilon,$$

di guisa che l'integrale si può rendere piccolo a piacere, epperò è nullo.

Valendo la stessa conclusione per ogni altro contorno si ha — in forza del teorema di MORERA — che $f(z)$ è olomorfa in tutto D.

Se, invece, l'insieme in parola ha ordine dimensionale minore di $2-p$, allora il prolungamento di $f(z)$ viene assicurato sotto la ipotesi che tale funzione soddisfi ad una condizione di HÖLDER con esponente $1-p$. (Nelle limitazioni contenenti m, N, k questi numeri non sono più costanti finite, ma quantità piccole a piacere).

4. Riunendo i risultati ottenuti precedentemente possiamo enunciare i seguenti teoremi:

I. *Il prolungamento analitico di* f(z) *su* I *è assicurato se tale insieme ha ordine dimensionale* $\dfrac{\text{minore di}}{\text{uguale a}}$ $2-p$, *con* $p>1$, *e se* $f(z)\vartheta'^{p-1}$ $\dfrac{\text{è limitato}}{\text{tende a zero}}$ *con* $\vartheta \to 0$.

II. *Alla stessa conclusione si perviene se l'ordine dimensionale di* I *è* $\dfrac{\text{minore di}}{\text{uguale a}}$ $2-p$, *con* $p<1$, *e se* f(z) *è hölderiana con esponente* $\dfrac{\text{uguale a}}{\text{maggiore di}}$ $1-p$.

Osserviamo i casi limiti seguenti, le cui dimostrazioni sono comprese in quelle esposte sopra.

Se nella prima parte del teorema I si fa $p=1$ si ha il primo teorema di PAINLEVÉ, o piuttosto l'enunciato che noi abbiamo sostituito ad esso.

Facendo $p=1$ nella seconda parte del teorema II si ha il secondo teorema di PAINLEVÉ. Infine, se nella prima parte di tale teorema si pone $p=0$, si ha che:

Se l'ordine dimensionale di I *è minore di* 2, *condizione sufficiente affinchè* f(z) *sia prolungabile è che tale funzione sia lipschitziana.*

5. Prescindendo da ipotesi separate sull'insieme e sulla funzione possiamo dimostrare il seguente semplice criterio generale di forma integrale:

Se f(z) *è sommabile e se*

$$\lim' \frac{1}{\vartheta} \int\int_{J(\vartheta)} |f(z)|\,dx\,dy = 0$$

(z) *è olomorfa su* I,

Abbiamo ovviamente:

$$\iint_{J(\vartheta)} |f(z)|\,dx\,dy = \int_0^{\vartheta} d\vartheta \int_{C(\vartheta)} |f(z)|\,ds \quad , \quad \left|\int_{C(\vartheta)} f(z)\,dz\right| < \int_{C(\vartheta)} |f(z)|\,ds;$$

perciò il teorema è dimostrato se facciamo vedere, come nel n. 2, che per qualche ϑ' l'integrale $\int_{C(\vartheta')} |f(z)|\,ds$ è piccolo a piacere.

Infatti, se fosse sempre:

$$\int_{C(\vartheta)} |f(z)|\,ds > m$$

con m fisso, si avrebbe:

$$\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} d\vartheta \int_{C(\vartheta)} |f(z)|\,ds > m,$$

e quindi:

$$\lim' \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} d\vartheta \int_{C(\vartheta)} |f(z)|\,ds > 0 \quad ,$$

contro il supposto.

Determinazione della pressione esercitata su di un suolo elastico da una trave appoggiata su di esso.

Nota dell'ing. **Franco Mazzarella** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Considerando il suolo come un semispazio indefinito, ed applicando le formule di Boussinesq si determinano gli spostamenti in superficie determinati da una pressione $p(x, y)$. Eguagliando gli spostamenti dei punti del piano a quelli dei punti della trave con essi a contatto si scrive un'equazione integrale atta a determinare la funzione $p(x, y)$. Si indica una via per la soluzione di questa equazione servendosi di uno sviluppo di $p(x, y)$ in serie trigonometrica.

Ci proponiamo nel presente lavoro di determinare la distribuzione delle pressioni provocate sul suolo di appoggio di una trave flessibile, caricata in un modo affatto generico secondo una via diversa da quella seguita ordinariamente col metodo di Zimmermann e che conduce a tener conto per la valutazione della pressione in un punto non solo dell'abbassamento della trave in corrispondenza di esso ma della complessiva deformazione della trave stessa.

Consideriamo il suolo di appoggio della trave come un semispazio indefinito limitato superiormente da un piano orizzontale di materiale elastico, omogeneo e le cui costanti di Lamé siano indicate con λ e μ. Riferiamo tale semispazio ad un sistema di assi cartesiani di cui l'origine è nel piano limite e l'asse z ha la direzione verticale rivolta verso il basso.

Indicheremo con x, y, z, le coordinate di un generico punto P e con ξ e η quelle di un ulteriore punto P' del piano limite e con r la distanza PP'. Se nel piano limite si esercita una pressione variabile da punto a punto espressa da $p(\xi, \eta)$ si genera nel semispazio una deformazione e le componenti di spostamento di un punto generico sono state determinate da Boussinesq e sono le seguenti:

$$(1)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\displaystyle\int\int r p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta - \dfrac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\int \log(z+r)\,p(\xi\eta)\,d\xi d\eta \\ v = -\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\displaystyle\int\int r p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta - \dfrac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\int \log(z+r)\,p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \\ w = -\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\displaystyle\int\int r p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + \dfrac{2\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\displaystyle\int\int \dfrac{p(\xi,\eta)}{r}\,d\xi\,d\eta \end{cases}$$

nel caso che il punto P si trovi nel piano $x\,y$ l'espressione di w diventa:

$$w = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu\,(\lambda+\mu)} \iint \frac{p\,(\xi\,,\,\eta)}{r}\,d\xi\,d\eta \qquad (1)'$$

S'intende che i vari integrali ora scritti vanno estesi a tutta la superficie caricata. Consideriamo il caso che sul suolo si trovi appoggiata una trave, di sezione rettangolare costante di cui indichiamo con $2b$ la larghezza e $2l$ la lunghezza, I il momento d'inerzia della sezione e con E il modulo di elasticità. Disponiamo gli assi coordinati in modo che l'asse x sia parallelo all'asse geometrico della trave e che le due sezioni estreme di esso giacciano nei piani $x = -l$, $x = l$.

Indichiamo ancora con $f(x)$ la funzione nota, esprimente il carico esterno che grava sulla trave, per effetto di tale carico essa eserciterà una pressione sul suolo che si distribuirà con una legge $p\,(\xi\,,\,\eta)$ per ora incognita e che qui vogliamo determinare. Il suolo a sua volta eserciterà come reazione una pressione sulla trave data $-p\,(\xi\,,\,\eta)$ e la risultante di tale pressione lungo la corda parallela all'asse delle y di ascissa x sarà data da

$$-\int_{-b}^{b} p\,(x\,,\,\eta)\,d\eta$$

e pertanto la trave in definitiva sarà sollecitata da un carico

$$f_1(x) = f(x) - \int_{-b}^{b} p\,(x\,,\,\eta)\,d\eta \qquad (2)$$

In base alla nota equazione differenziale della linea elastica delle travi inflesse abbiamo, indicando con w le ordinate di tale linea elastica

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{E\,I}\,f_1(x)$$

da cui con quattro integrazioni successive si ha, tenendo conto della (2)

$$w = \frac{1}{E\,I}\int_{-l}^{x} f(\xi)\,\frac{(x-\xi)^3}{3!}\,d\xi - \frac{1}{E\,I}\int_{-l}^{x} \frac{(x-\xi)^3}{3!}\,d\xi \int_{-b}^{b} p(\xi\,,\,\eta)\,d\eta + L_3(x) \qquad (3)$$

dove $L_3(x)$ è un polinomio di terzo grado in x ed i cui quattro coefficienti si determinano ovviamente tenendo conto delle condizioni di equilibrio meccanico di tutta la trave che corrispondono a porre uguale a zero il momento flettente e lo sforzo di taglio alle due estremità di essa e che si traducono nelle relazioni

$$\left(\frac{d^3 w}{d x^3}\right) = \left(\frac{d^2 w}{d x^2}\right) = 0 \text{ (per } x = \pm l.$$

Per il contatto esistente tra trave e suolo, ogni punto della superficie di questo interno al rettangolo di appoggio della trave, subirà in direzione verticale lo stesso spostamento di quello della trave con cui è a contatto. Per non complicare eccessivamente il problema riterremo che la sezione trasversale della trave rimanga indeformata — il che equivale a ritenere $m = 0$ per il materiale di cui è fatto questa trave — ipotesi che per il calcestruzzo si adotta in molti calcoli tecnici. Ora gli spostamenti dei punti del piano sono dati da (1)' e quelli dei punti della trave da (3) eguagliando le quali avremo l'equazione che ci porta alla conoscenza di $p(\xi, \eta)$. Essa è:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_{-l}^{l}\int_{-b}^{b} \frac{p(\xi\,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi\, d\eta = \frac{1}{3!\,E\,I} \int_{-l}^{x} \left\{ f(\xi) - \int_{-b}^{b} p(\xi\,\eta) d\eta \right\} (x-\xi)^3 d\xi \quad (4)$$

Per semplicità di scrittura indichiamo con α la quantità

$$\frac{4\pi\mu(\lambda+\mu)}{E\,I\,(\lambda+2\mu)}$$

(α avrà le dimensioni dell'inverso di un momento d'inerzia) ed ancora poniamo

$$F(x) = \alpha \int_{-l}^{x} \frac{(x-\xi)^3}{3!} f(\xi)\, d\xi + L_3(x)$$

senza ledere la generalità potremo ritenere $b = 1$ $l = 1$.

Cerchiamo di risolvere la (4) ponendo $p(x, y)$ nella seguente forma:

$$p(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \varphi_n(y) \cos n\pi x + \sum_{1}^{\infty} \psi_n(y) \operatorname{sen} n\pi x$$

e sviluppiamo in serie trigonometriche tanto $[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-\frac{1}{2}}$ quanto $F(x)$ poniamo perciò

$$F(x)=\sum_0^{\infty} a_n \cos n\pi x + \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x$$

$$[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} c_n(y-\eta)\cdot\cos n\pi(x-\xi)$$

Dove ovviamente le $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ sono le incognite del problema, a_n e b_n costanti note e c_n funzioni note di $(y-\eta)$. Ora la (4) può essere scritta

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sum c_\nu \varphi_n(y)\cos n\pi\xi\cos\nu\pi(x-\xi)\,d\xi\,d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Sigma_{\nu,n} c_\nu\psi_n(\eta)\operatorname{sen} n\pi\xi\cos\nu\pi(x-\xi)d\xi\,d\eta = \Sigma(a_n\cos\pi n x+b_n\operatorname{sen} n\pi x) - \tag{5}$$

$$-\alpha\int_{-1}^{x}\frac{(x-\xi)^3}{3!}\,d\xi\cdot\int_{-1}^{1}[\varphi_n(\eta)\cos n\pi\xi+\psi_n(\eta)\operatorname{sen} n\pi\xi]\,d\eta$$

da cui tenendo conto che

$$\int_{-1}^{1}\operatorname{sen} m\pi x\cos n\pi x\,dx=0;\quad \int_{-1}^{1}\operatorname{sen} m\pi x\operatorname{sen} n\pi x dx=\begin{cases}0 \text{ per } m=n=0, m\neq n\neq 0\\ 1 \;\;\text{»}\;\; m=n\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\cos m\pi x\operatorname{sen} n\pi x\,dx=\begin{cases}0 \text{ per } m\neq n\\ 2 \;\;\text{»}\;\; m=n=0\\ 1 \;\;\text{»}\;\; m=n\neq 0\end{cases}$$

abbiamo che la (5) viene espressa così:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\cos n\pi x\int_{-1}^{1}c_n(y-\eta)\varphi_n(\eta)\,d\eta+\sum_{n=1}^{n=\infty}\operatorname{sen} n\pi x\int_{-1}^{1}c_n(y-\eta)\psi_n(\eta)\,d\eta=$$

$$\sum a_n\cos n\pi x+\sum b_n\operatorname{sen} n\pi x-\sum\frac{\alpha\cos n\pi x}{n^4\pi^4}\int_{-1}^{1}\varphi_n(\eta)\,dy-$$

$$-\sum\alpha\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n^4\pi^4}\int_{-1}^{1}\psi_n(\eta)\,d\eta$$

che possiamo scrivere

$$\sum \cos n\pi x \left\{ \int_{-1}^{1} \left[c_n(y-\eta) + \frac{\alpha}{n^4 \pi^4} \right] \varphi_n(\eta)\, d\eta - a_n \right\} +$$

$$+ \sum \operatorname{sen} n\pi x \left\{ \int_{-1}^{1} \left[c_n(y-\eta) + \frac{\alpha}{n^4 \pi^4} \right] \psi_n(\eta)\, d\eta - b_n \right\} = \sigma$$

da cui ricaviamo le equazioni determinatrici di φ e ψ:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left[c_n(y-\eta) + \frac{\alpha}{n^4 \pi^4} \right] \varphi_n(\eta)\, d\eta = a_n \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \left[c_n(y-\eta) + \frac{\alpha}{\pi^4 n^4} \right] \psi_n(\eta)\, d\eta = b_n . \end{cases} \tag{6}$$

Esse sono equazioni integrali di Fredholm di prima specie [1]) il cui nucleo è funzione simmetrica di $y - \eta$ il che ci assicura che questi nuclei ammettono certamente autofunzioni reali che formano un sistema ortogonale e che una funzione lineare di tali autofunzioni ci darà la soluzione di ognuna della (6).

Ci riserviamo in un prossimo lavoro di determinare effettivamente le $c_n(y-\eta)$ e quindi le soluzioni di (6) in forma finita.

---

[1]) G. Vivanti, *Equazioni integrali lineari* (Milano Hoepli). — M. Picone, *Appunti di analisi superiore* (Napoli Rondinella). Cap. VII p. 561 e seg.

Questioni di convergenza e teorema di Hadamard per le serie di Dirichlet e le serie di potenze « generalizzate » gruppali.

Nota del prof. **Guido Barba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 7 marzo 1942 - XX)

Sunto. — Nella presente Nota si riprende lo studio delle serie di Dirichlet gruppali, già trattate in altro lavoro, ed, in parallelo, quello di serie di potenze « generalizzate » — per le quali, cioè, gli esponenti non sono necessariamente interi — serie soddisfacenti, anch'esse, a proprietà gruppali analoghe a quelle imposte alle serie di Dirichlet. Si vengono a stabilire talune questioni di convergenza e si fa vedere che per le serie « generalizzate » vale il teorema di Cauchy-Hadamard. Si ritrova, poi, un teorema già stabilito, direttamente, per le serie di Dirichlet ordinarie e che vale, anche, per le serie (Dg).

1. — In una precedente Nota [1]) abbiamo messo in luce la necessità di imporre una condizione gruppale alle serie di Dirichlet ove le si voglia sottoporre agli ordinari procedimenti di calcolo, studiando, quindi, le proprietà di siffatte serie di « Dirichlet gruppali » ed esaminandone le possibili generalizzazioni nel campo reale degli esponenti ed in quello complesso.

Una serie di Dirichlet gruppale, la indicheremo con il simbolo (Dg) con la condizione che per ogni coppia di indici s, ρ sia: $\lambda_r+\lambda_\rho=\lambda_p$ con

$$p = \varphi(r, \rho) \tag{0}$$

risultando:

$$\sum a_r e^{-\lambda_r \cdot s} \cdot \sum b_\rho e^{-\lambda_\rho \cdot s} = \sum c_p e^{-\lambda_p \cdot s}$$

dove:

$$c_p = a_r a_\rho + a_s a_\sigma + \cdots$$

essendo: (r, ρ); (s, σ); .... le coppie che danno origine, giusta la (0), alle p stesse.

---

[1]) *Proprietà gruppali nelle serie di* Dirichlet *; serie di* Dirichlet *gruppali.* — Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat., serie 4ª, vol. X, Napoli, 1939-40.

Nella presente Nota riprendiamo lo studio di tali serie ricollegandolo a quello di serie di potenze «generalizzate» — per le quali, cioè, gli esponenti non sono necessariamente numeri interi — serie soddisfacenti anche esse a proprietà gruppali analoghe a quelle imposte alle serie di DIRICHLET. Si vengono a stabilire, così, talune questioni di convergenza e si fa vedere che per le serie di potenze «generalizzate» vale il teorema di CAUCHY-HADAMARD.

Si ritrova, poi, un teorema già stabilito, direttamente, per le serie di DIRICHLET ordinarie e che vale, anche, per le serie (*Dg*).

2. — Consideriamo la serie (*Dg*):

$$(1) \qquad \sum e^{-\lambda_n \cdot s}, \qquad (s=\sigma+it)$$

e supponiamo, dapprima, che la «traccia» — per il simbolismo e la terminologia adottati nella presente, vedi Nota citata — sia composta di un solo elemento: l_0.

La (1), allora, si scriverà, posto: $e^{-l_0 \cdot s}=y$:

$$(2) \qquad \sum y^n$$

con n intero positivo, per cui essa converge per:

$$e^{-l_0\sigma} < 1$$

e si può concludere che se la «traccia» è di uu solo elemento l'ascissa di convergenza di (1) è zero.

Supponiamo, ora, la «traccia» costituita da due elementi: l_0 ed l_1.

Sarà, allora, con n_0 ed n_1 interi:

$$\lambda_n = n_0 l_0 + n_1 l_1$$

e risulterà:

$$\sum e^{-\lambda_n \cdot s} = \sum e^{-sn_0 l_0} \cdot \sum e^{-sn_1 l_1}$$

Ma le due serie a secondo membro hanno, ciascuna, l'ascissa zero, quindi zero sarà l'ascissa di convergenza della serie data.

Sicchè una (*Dg*)-*unitaria* — come diremo una (*Dg*) a coefficienti unitari — a «traccia» composta di un numero finito di elementi [o di un numero

infinito di elementi, con un certo vincolo che esamineremo oltre] ha come ascissa di convergenza *zero*.

3. Detti ε ed η due positivi arbitrari, poichè è, da un certo n in poi:

$$\left| e^{-\lambda_n \cdot \varepsilon} \right| < \eta$$

e risulta:

$$\left| a_n c^{-\gamma_n (s+\varepsilon)} \right| = \left| a_n e^{-\lambda_n s} \right| \cdot \left| e^{-\lambda_n \cdot \varepsilon} \right|$$

segue che, se la serie:

$$\sum a_n e^{-\lambda_n \cdot s_0}$$

converge, convergerà assolutamente ed uniformemente la serie:

$$\sum a_n e^{-\lambda_n \cdot s}$$

per:

$$\sigma < \sigma_0$$

Si conclude che una (Dg) ha come ascissa di convergenza $\sigma = C$, essendo:

$$C = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{lg \mid a_n \mid}{\lambda_n}$$

convergendo la serie assolutamente ed uniformemente per

$$\sigma \geq \sigma_0 < C$$

4. — Nella teoria generale delle serie ordinarie di DIRICHLET si stabiliscono delle proprietà, in relazione a questioni di convergenza, per particolari classi di serie, procedendo, gradualmente, sino a serie qualunque. Così, in un primo stadio, si prendono in esame quelle serie per cui, posto:

$$D = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{lg\, n}{\lambda_n}$$

risulti: $D = 0$ e per tali serie si stabilisce il teorema: Data una serie di DIRICHLET per la quale risulti $D = 0$, posto:

$$C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{lg\,|\,a_n\,|}{\lambda_n}$$

la serie diverge per $\sigma < C$ e converge assolutamente ed uniformemente per $\sigma \gtrless \sigma_0 > C$.

Nel caso ordinario, stabilito tale teorema, si passa, poi, allo studio di una serie qualsiasi, utilizzando la trasformazione di ABEL.

Nel caso delle serie (Dg), invece, le cose si semplificano nel senso che, per tali serie, le corrispondenti serie *unitarie*, come si è visto, hanno, tutte, ascissa di convergenza zero, per cui le (Dg) soddisfano alla condizione $D = 0$.

Ne segue che il teorema, che fissa l'ascissa di convergenza di una (Dg) soddisfacente alla condizione $D = 0$, è del tutto gederale [e non abbisogna di ulteriori estensioni, come nel caso ordinario].

5. — Attraverso la posizione: $e^{-s} = x$, la serie:

$$\sum a_n e^{-\lambda_n \cdot s} \tag{3}$$

si muta nell'altra:

$$\sum a_n x^{\lambda_n} \tag{4}$$

che diremo «serie di potenze generalizzata».

Lo studio di siffatte serie di potenze si presenta interessante e per le analogie con le serie di potenze ordinarie e per i possibili contributi allo studio delle serie di DIRICHLET.

Naturalmente, dal punto di vista dal quale ci siamo posti, occorrerà imporre alle nuove serie proprietà gruppali analoghe a quelle imposte alle (Dg) — e che, pertanto, quì, non ripetiamo — convenendo di rappresentare tali serie col simbolo (Pg).

6. — Esaminiamo talune questioni di convergenza per una (Pg), supponendo, almeno per ora, le λ reali.

Consideriamo, innanzitutto, una (Pg) a coefficienti unitari, serie che diremo: (Pg)-*unitaria*:

$$\sum x^{\lambda_n} \tag{5}$$

convergente, come si è visto, per ogni s tale che sia $\sigma < 0$. Segue, detto ρ il modulo di x, che dev'essere:

$$lg\,\rho < 0$$

e quindi:

$$|x| < 1$$

Si conclude, pertanto, che una (*Pg*)-*unitaria* converge per ogni $|x| < 1$ [conformemente al caso ordinario $\lambda_n = n$].

La (5) ha, cioè, raggio di convergenza unitario.

7. — Supponiamo che la (*Pg*) converga per un certo valore non nullo x_0 di x, che sia, cioè, convergente la serie:

$$\sum a_n x_0^{\lambda_n}$$

Dovrà il termine generale tendere a zero al crescere indefinitamente di n e perciò, appena n superi un certo p, si avrà:

$$\left| a_n x_0^{\lambda_n} \right| < 1$$

dalla quale consegue:

$$|a_n| < \frac{1}{|x_0|^{\lambda_n}}$$

Nella ipotesi sia:

$$|x| \leqq |x_0|$$

la serie (*Pg*)-*unitaria*:

$$\sum \left| \frac{x}{x_0} \right|^{\lambda_n}$$

è convergente e dal confronto con la serie:

$$\sum |a_n| \cdot |x|^{\lambda_n}$$

segue che la nostra (*Pg*) è *assolutamente convergente* per ogni $|x| \leq |x_0|$.

8. — Supponiamo che la (*Pg*) converga assolutamente per un valore non nullo, x_0, di x, converga, cioè, la serie a termini costanti positivi:

$$\sum |a_n| \cdot |x_0|^{\lambda_n}$$

Per un qualunque $|x| \leq |x_0|$ sarà:

$$|a_n| \cdot |x|^{\lambda_n} \leq |a_0| \cdot |x_0|^{\lambda_n}$$

e si può concludere che *una* (*Pg*) È ASSOLUTAMENTE *ed* UNIFORMEMENTE *convergente in un qualsiasi intervallo* $(-\gamma_0, \gamma_0)$ *interno all'intervallo* $(-x_0, x_0)$.

9. — Faremo vedere, ora, che il teorema di CAUCHY-HADAMARD si può estendere alle (*Pg*).

Consideriamo la serie (*Pg*), nella ipotesi che i numeri λ siano positivi e posto $|a_r| = \sigma_r$ scriviamo l'insieme:

$$(6) \qquad \sigma_1^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad \sigma_2^{\frac{1}{\lambda_2}}, \ldots, \quad \sigma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}, \ldots$$

Diciamo λ l'elemento max. dell'insieme derivato di (6), ξ un numero positivo minore di $\frac{1}{\lambda}$, μ un numero compreso tra λ e $\frac{1}{\xi}$. Sarà:

$$\lambda < \mu = \frac{\theta}{\xi} \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

e, per la stessa definizione di λ, da un certo punto in poi:

$$\sigma_p^{\frac{1}{\lambda_p}} \leq \mu = \frac{\theta}{\xi}$$

da cui:

$$\sigma_p \xi^{\lambda_p} \leq \theta^{\lambda_p}$$

e quindi, anche:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_p \sigma_p \xi^{\lambda_p} \leq \sum_{n+1}^{\infty}{}_p \theta^{\lambda_p}$$

Ma la serie a secondo membro è una (*Pg*)-*unitaria* che abbiamo visto convergere per $|0| < 1$, dunque anche la serie a primo membro converge. Ossia, la serie data converge per ogni $\xi < \frac{1}{\lambda}$.

Se è $\xi < \frac{1}{\lambda}$, in corrispondenza ad infiniti valori di (6), sarà:

$$\sigma_h > \frac{1}{\xi^{\lambda_h}}$$

ed anche:

$$\sigma_h \cdot \xi^{\lambda_h} > 1$$

per cui la serie data è divergente per ogni $\xi > \frac{1}{\lambda}$. Dunque, $\rho = \frac{1}{\lambda}$ è il raggio di convergenza della serie (*Pg*), essendo λ il max-lim. dell'insieme derivato dell'insieme (6).

Si conclude, dunque, che il raggio di convergenza di una *serie di potenze generalizzata* è l'inverso dell'elemento massimo λ dell'insieme derivato dell'insieme dei numeri non negativi:

$$\sigma_1^{\frac{1}{\lambda_1}}, \sigma_2^{\frac{1}{\lambda_2}}, \ldots, \sigma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}, \ldots,$$

con $|a_r| = \sigma_r$; teorema che diremo di HADAMARD *generalizzato.*

10. — Possiamo ritrovare, ora, un risultato già stabilito, direttamente, per le serie di DIRICHLET ordinarie e che vale, anche, per le serie (*Dg*)

In seguito al teorema di HADAMARD-generalizzato una (*Pg*) ha raggio di convergenza $\rho = \frac{1}{\lambda}$ con λ fornito da:

$$\lim . \max . \sigma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

Ne segue che la (*Pg*) converge per $|x| < \frac{1}{\lambda}$, diverge per $|x| > \frac{1}{\lambda}$.

Si trae, da ciò, che la corrispondente serie (*Dg*) converge per $\sigma > lg\,\lambda$, diverge per $\sigma < lg\,\lambda$.

Pertanto, l'ascissa di convergenza C della (*Dg*) è data da $lg\,\lambda$, vale a dire che è:

$$C = \lim . \max . \frac{lg\,\sigma_n}{\lambda_n}$$

teorema che stabilito per le serie di DIRICHLET ordinarie, in un particolare caso, si vede, quì, valere per le serie (Dg), senza restrizioni.

Inoltre, poichè la (Pg) è assolutamente ed uniformemente convergente per ogni $|x| < \frac{1}{\lambda}$, sarà la (Dg) assolutamente ed uniformemente convergente per ogni $\sigma < C$.

11. — Riprendiamo, ora, la questione relativa alle serie con «traccia» composta di infiniti elementi.

Consideriamo, a tal uopo, innanzitutto, le due serie:

$$(7)\quad \sigma_0 + \sum a_{r_1\, n_1} e^{-l_{r_1}\cdot n_1 \cdot s} + \sum a_{r_2 r_3 n_2 n_3} e^{-(l_{r_2}\cdot n_2 + l_{r_3}\cdot n_3)\cdot s} + \dots\dots$$

e

$$(8)\quad \sum a_{r_1 r_2 \dots ;\, n_1 n_2 \dots} e^{-[l_{r_1}\cdot n_1 + l_{r_2}\cdot n_2 + \dots]\cdot s}$$

ed osserviamo: I) che le due serie sono entrambe, evidentemente, gruppali; II) che la seconda è apparentemente più generale della prima, per il fatto che in (8) il numero degli addendi che figurano nell'esponenti e infinito. Ma è facile convincersi che, ove si valutino opportunamente le condizioni di convergenza, la (8) non è affatto più generale della (7). Difatti, poichè le l sono positive — come si è notato nella nostra citata Nota — e le n interi positivi, se la serie:

$$\sum_1^\infty {}_s\, l_{r_s}\cdot n_s$$

divergesse la (8) stessa diverrebbe illusoria, ond'occorre che la predetta serie sia convergente, ossia che solo un numero finito di valori n sia diverso da zero il che porta che la (8) non differisce dalla (7).

Sicchè, in rappresentanza di una serie (Dg) può ben prendersi la (7).

12. — Consideriamo, ora, la serie unitaria:

$$(9)\quad \begin{cases} 1 + e^{-l_1\cdot s} + e^{-l_2\cdot s} + \dots + \\ + e^{-2l_2\cdot s} + e^{2l_2\cdot s} + \dots + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots + \\ + e^{-(l_1+l_2)\cdot s} + e^{-(l_1+l_3)\cdot s} + \dots\dots \end{cases}$$

Posto:

$$\mu_\nu = e^{-l_\nu \cdot s} + e^{-2l_\nu \cdot s} + \dots \tag{10}$$

la (9) può scriversi:

$$(1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3)\cdot\dots\dots \tag{11}$$

Ma la (10) è una (Dg)-unitaria con « traccia » di un solo elemento, dunque, per quanto è stato assodato essa converge per $\sigma < 0$; ne segue che (10) può mettersi — ricordando che le λ sono reali — sotto la forma:

$$\mu_\nu = e^{-l_\nu \cdot s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-l_\nu \cdot s}}$$

Pertanto, il prodotto infinito (11) è convergente unitamente alla serie $\Sigma \mu_\nu$ che, a sua volta, converge unitamente alla serie:

$$z^{l_1} + z^{l_2} + \dots + z^{l_\nu} + \dots \tag{12}$$

avendo posto $e^{-s} = z$.

Difatti, posto, brevemente: $z^{l_n} = \bar{b}_n$ è $\frac{z^{l_n}}{1 - z^{l_n}} = a_n$, attraverso le relazioni:

$$a_n = \bar{b}_n \cdot \frac{1}{1 - \bar{b}_n}$$

$$b_n = a_n \cdot \frac{1}{1 + a_n}$$

si vede subito che le due serie Σa_n e Σb_n convergono insieme.

La serie (12), peraltro, converge, per $|z| < 1$, se è soddisfatta la condizione:

A) che la successione $[l_{\nu+1} - l_\nu]$ non tenda a zero.

13. — Che il risultato ottenuto sia strettamente connesso al tipo di gruppalità da noi imposto sin dal principio alle serie in questione, si pone in luce attraverso il seguente esempio.

Consideriamo la serie:

$$x + x^{\frac{3}{2}} + x^{2} + x^{\frac{9}{4}} + \dots + x^{\frac{12}{4}} + x^{\frac{25}{8}} + \dots + x^{\frac{32}{8}} + \dots$$

che è una serie unitaria con «traccia» costituita da una infinità di elementi ed aventi, sì, una proprietà gruppale, ma non quella da noi precisata, pel fatto che quì, detti r ed s due esponenti di x, anche $r+s$ è un esponente, ma non lo è $n_1 r + n_2 s$, con n_1 ed n_2 interi.

Ebbene, tale serie è convergente pur non essendo verificata la condizione A), difatti essa è maggiorata dalle serie:

$$2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots.$$

e quindi se ne può assicurare, per tal via, la convergenza solo per $|x| < \frac{1}{2}$.

14. — Dai n.n. 2 ed 11 segue che una serie (Dg)-unitaria a «traccia» composta da un numero infinito di elementi ha per ascissa di convergenza lo zero, sotto la condizione A) enunciata al n. 11.

15. — Dopo ciò si può affermare che tutto quanto è stato detto con referenza a serie aventi «traccia» composta di un numero finito di elementi va ritenuto valido per serie qualsiasi, sempre che le corrispondenti serie unitarie soddisfino la predetta condizione A).

Determinazione del "risultante di due equazioni,, per la ricerca delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione torsione e taglio.

Nota dell'ing. **Franco Mazzarella** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Si considera un cilindro circolare soggetto a flessione torsione e taglio, e si calcola la tensione ideale prodotta da queste sollecitazioni in un punto generico, si osserva che per ogni corda parallela all'asse neutro, che si assume come asse della x il massimo di tale tensione, almeno nei casi praticamente più interessanti, si verifica all'estremità. Di questo massimo che risulta funzione della sola coordinata y si determina la derivata rispetto ad y, la si eguaglia a zero ed applicando il risultante di Silvester si elimina la y tra questa equazione e quella che si è derivata precedentemente. Si ottiene così il massimo valore assunto della tensione ideale su tutta la sezione in funzione dei soli parametri della sollecitazione esterna.

Generalmente il calcolo di progetto di un cilindro circolare soggetto a flessione composta viene eseguito in base alla formula

$$M_{fi} = \frac{m-1}{2m} M_f + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

nota come formula del momento flettente ideale in cui M_f ed M_t sono i momenti flettenti e torcenti ed m il coefficiente di Poisson del materiale di cui è costituito il cilindro (in seguito assumeremo per m il valore 4). Questa formula è di uso molto comodo in quanto consente di determinare il raggio del cilindro mediante applicazione della formula di Navier, come se questo fosse sollecitato a flessione semplice dal momento M_{fi}; ma la sua applicazione significa ammettere che la massima tensione ideale si verifichi all'estremità dell'asse di sollecitazione, il che equivale a trascurare il contributo che alla tensione ideale dà la presenza della sollecitazione tangenziale prodotta da uno sforzo di taglio T.

Il prof. Ricci in un suo lavoro di cui qui richiamiamo alcuni risultati ha anzi dimostrato che la tensione ideale massima, nel caso dell'azione simultanea di un momento flettente, di un momento torcente e di uno sforzo di taglio si verifica sempre in un punto distinto dell'estremo dell'asse di sollecitazione ed è riuscito a determinarne il valore a mezzo di un procedimento numerico-grafico.

Per comodità del lettore richiamo qui i termini del problema.

Riferiamo la sezione del cilindro ad una coppia di assi di cui l'asse x sia l'asse neutro; il momento flettente provoca una sollecitazione normale

$$\sigma_z = \frac{M_f y}{I_x} = \frac{4 M_f y}{\pi r^4} \tag{1}$$

il momento torcente una sollecitazione tangenziale diretta normalmente al raggio

$$\tau_{zr} = \frac{M_t \sqrt{x^2+y^2}}{2 I_x} = \frac{2 M_t \rho}{\pi r^4},$$

(dove ρ è la distanza di un generico punto dall'origine) e le cui componenti sono

$$\tau_{zx} = \frac{2 M_t y}{\pi r^4}, \quad \tau_{yz} = \frac{2 M_t x}{\pi r^4}. \tag{2}$$

Le componenti della sollecitazione τ_{zt} provocata dallo sforzo di taglio sono

$$\tau_{xz} = \frac{-T(m+2)}{(m+1)\pi r^4} xy \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{T}{2(m+1)\pi r^4}[(3m+2)(r^2-y^2)-(m-2)x^2]. \tag{3}$$

Da queste formule risulta chiaramente:

1) che la σ_z è costante su ogni corda parallela all'asse neutro, che il suo massimo valore è

$$\sigma_z = \frac{4 M_f}{\pi r^3} \tag{1'}$$

2) che il massimo valore di τ_{zr} si ha sul contorno della sezione, e quindi, all'estremo di ogni corda e tale massimo, che indicheremo con τ_{tor} vale

$$\tau_{tor} = \frac{2 M_t}{\pi r^3} \tag{2'}$$

3) che lungo il contorno la sollecitazione prodotta dal taglio vale

$$\tau_{zc} = \frac{T(m+2)}{(m+1)\pi r^4} x \tag{3'}$$

e raggiunge quindi il suo massimo valore sull'asse neutro con

$$\tau_{zcm} = \frac{T(m+2)}{(m+1)\pi r^2} \cdot \qquad (3)''$$

Poichè la τ_{zr} e la τ_{zt} devono sommarsi geometricamente per avere la τ_z totale e poiche a prima vista nulla si può dire nell'andamento della τ_{zt} nell'interno della sezione non possiamo asserire che lungo una data corda il massimo di τ_z si verifica sempre al contorno anzi si può far vedere che per valori opportuni di M_t e T tale massimo si ha sicuramente all'interno della sezione. Il Ricci ha dimostrato che ciò può aversi soltanto se

$$\frac{\tau_{zcm}}{\tau_{zr}} \geq \frac{m+2}{m-1}$$

e per valori di y inferiori ad un Y da determinarsi caso per caso, ciò corrisponde assumendo $m = 4$, a

$$Tr \geq 5\, M_t. \qquad (4)$$

Riservandoci di esaminare tale caso in un ulteriore lavoro noi nel presente considereremo soltanto la τ_z che si verifica al contorno anche perchè la disuguaglianza (4) è raramente verificata in pratica.

Per semplificare i calcoli che seguiranno introduciamo i due seguenti numeri:

$$\sigma' = \frac{\sigma_{zmax}}{\tau_{zr}} = \frac{2\,M_f}{M_t} \qquad \tau' = \frac{\tau_{zcm}}{\tau_{zr}} = \frac{m+2}{m+1}\,\frac{Tr}{2\,M_t} \qquad (5)$$

dopo di che le (1) e (3'), assumendo $r = 1$ possono scriversi

$$\sigma_z = \tau_{zr}\,\sigma'\,y \qquad ; \qquad \tau_{zc} = \tau_{zr}\,\tau'\,\sqrt{1-y^2}$$

da cui

$$\tau_z = \tau_{zr}(1+\tau'\,\sqrt{1-y^2}) \qquad (6)$$

e ricordando la nota formula che ci dà la tensione ideale

$$\sigma_i = \frac{m-1}{2m}\,\sigma_z + \frac{m+1}{2m}\,\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}$$

e ponendo $\sigma_i = \sigma'_i \tau_{sr}$ abbiamo che (per $m = 4$)

$$\sigma'_i(y) = \frac{3}{8}\sigma' y + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma'^2_i y^2 + 4(\tau' \sqrt{1-y^2}+1)^2}. \qquad (7)$$

Dobbiamo ora determinare il massimo di σ'_i cioè il valore assunto da σ'_i per quel particolare y_* che verifica l'equazione

$$\frac{d\sigma'_i}{dy} = 0. \qquad (8)$$

Tale ricèrca, che è stata fatta graficamente dal prof. Ricci nel lavoro citato, qui viene eseguita per via analitica, con la limitazione sopra specificata.

Per il nostro scopo anzicchè trovare y_* risolvendo la (8) e sostituire tale valore in (7) si è preferito trasformare opportunamente la (7) e propriamente scriverla così:

$$16\sigma'^2_i - 12\sigma'\sigma'_i y + (25\tau'^2 - 4\sigma'^2)y^2 - 25\tau'^2 - 25 - 50\tau'\sqrt{1-y^2} = 0 \qquad (7)'$$

e quindi applicando il metodo dialitico di Silvester eliminare la y tra la (7)' e l'equazione ottenuta eguagliando a zero la derivata del 1.° membro rispetto ad y.

Tale equazione con facili semplificazioni si scrive, indicando con η il massimo di σ'_i che stiamo cercando:

$$[(4\sigma'^2 - 25\tau'^2)y + 6\sigma' y]\sqrt{1-y^2} - 25\tau' y - 0. \qquad (8)'$$

Per far scomparire i radicali moltiplichiamo la (7') per $-y$ (dove poniamo η al posto di σ'_i) e la (8') per $2\sqrt{1-y^2}$ e sommiamo; indi ricaviamo $\sqrt{1-y^2}$ da (8)' e lo sostituiamo in (7)' ed otteniamo così le due equazioni seguenti, sulle quali procederemo all'eliminazione di y:

$$\begin{cases} (25\tau'^2 - 4\sigma'^2)y^3 + (8\sigma'^2 - 25\tau'^2 + 25 - 16\eta^2)y + 12\sigma'\eta = 0 \\ 9\sigma'\eta(25\tau'^2 - 4\sigma'^2)y^2 + [4\eta^2(7\sigma'^2 - 100\tau'^2) + 4\sigma'^2(25\tau'^2 - 4\sigma'^2 - 25)]y + \\ + 3\sigma'\eta(25\tau'^2 - 8\sigma'^2 - 25 + 16\eta^2) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Prima di procedere oltre ci conviene di fare le seguenti notazioni:

$$\begin{cases} 25\tau'^2 - 4\sigma'^2 = t \\ 9(25\tau'^2 - 4\sigma'^2)\sigma'^2\eta^2 = 9t\sigma'^2\eta^2 = X \\ 8\sigma'^2 - 16\eta^2 - 25\tau'^2 + 25 = 4\sigma'^2 - 16\eta^2 - t + 25 = Y \\ \eta^2(7\sigma'^2 - 100\tau'^2) + \sigma'^2(25\tau'^2 - 4\sigma'^2 - 25) = -\eta^2(9\sigma'^2 + 4t) + \sigma'^2(t - 25) = Z \end{cases} \qquad (10)$$

in base alle quali il sistema (9) si scrive:

$$\begin{cases} t\,y^3 + Yy + 12\,\sigma'\eta = 0 \\ X\,y^3 + 4\sigma'\eta\,Zy - 3\sigma'^2\eta'^3\,Y = 0 \end{cases} \tag{9'}$$

e quindi il risultante delle equazioni è:

$$\begin{vmatrix} t & 0 & Y & 12\sigma'\eta & 0 \\ 0 & t & 0 & Y & 12\sigma'\eta \\ X & 4\sigma'\eta Z & -3\sigma'^2\eta'^2 Y & 0 & 0 \\ 0 & X & 4\sigma'\eta Z & -3\sigma'^2\eta^2 Y & 0 \\ 0 & 0 & X & 4\sigma'\eta Z & -3\sigma'^2\eta^2 Y \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

il cui sviluppo è il seguente:

$$(54\,X - 18\,YZ - Y^3)^3 - (Y^2 + 12\,Z)^3 = 0. \tag{11'}$$

Si può ora in (11)' sostituire ad X, Y, Z le loro espressioni (10) e ricavare la relazione seguente che ci esprime la η come funzione implicita di σ' e τ':

$$\begin{aligned} &256\eta^8(\sigma'^2-4\tau'^2)^2 + 16\eta^6(-17\sigma'^6 + 101\sigma'^4\tau'^2 + 56\sigma'^2\tau'^4 - 800\tau'^6 - 82\sigma'^4 + 672\sigma'^2\tau'^2 - \\ &\quad - 800\tau'^4) + \eta^4(16\sigma'^8 + 416\sigma'^6\tau'^2 - 5061\sigma'^4\tau'^4 + 10400\sigma'^2\tau'^6 + 10000\tau'^8 + 744\sigma'^6 - \\ &\quad - 6836\sigma'^4\tau'^2 + 8200\sigma'^2\tau'^4 - 20000\tau'^6 + 2481\sigma'^4 - 18600\sigma'^2\tau'^2) + \\ &+ \sigma'^2\eta^2(-32\sigma'^6\tau'^2 + 56\sigma'^4\tau'^4 + 2600\sigma'^2\tau'^6 - 10625\tau'^8 - 32\sigma'^6 + 616\sigma'^4\tau'^2 - 7250\sigma'^2\tau'^6 + \\ &\quad + 31875\tau'^6 - 672\sigma'^4 + 6700\sigma'^2\tau'^2 - 31875\tau'^4 - 2050\sigma'^2 + 10625\tau'^2) + \\ &\quad + \sigma'^4(\tau'^2-1)^2(4\sigma'^2 - 25\tau'^2 + 25)^2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Data la forma piuttosto complessa sotto cui si presenta la (12) diamo di η un'altra espressione al fine di renderne meno laborioso il calcolo numerico. Osserviamo che la (11)' risulta soddisfatta se si pone

$$X = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta \quad , \quad Y = 3(\alpha - \beta) \quad , \quad Z = 3\alpha\beta \tag{13}$$

dove α e β sono due parametri arbitrari.

Tenendo conto delle (13) e con facili riduzioni le (10) possono scriversi:

$$\begin{cases} \eta^2 = \dfrac{4\sigma'^2 - t + 25 - 3(\alpha-\beta)}{16} \\ 9\sigma'^2 t(4\sigma'^2 - t + 25 - 3\alpha + 3\beta) = 16(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta) \\ t^3 - 25t^2 + 3t^2(\alpha-\beta) - 100t\sigma'^2 = 4(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3t\alpha\beta). \end{cases} \tag{14}$$

Poichè note le caratteristiche della sollecitazione esterna (M_f, M_t, T) si ricavano immediatamente σ' τ' e t dalle ultime due delle (14) si possono

ricavare i valori numerici di α e β mediante i quali la si ottiene subito η dalla prima delle (14) stesse.

Può tornare utile considerare il rapporto χ tra la η e la tensione massima calcolata in base al momento flettente ideale, cioè

$$\chi = \frac{8\,\eta}{3\sigma' + 5\sqrt{\sigma'^2+4}}$$

e che servendoci delle (14) diventa:

$$\chi^2 = \frac{31\sigma'^2 - 100\tau'^2 + 100 - 12(\alpha-\beta)}{34\sigma'^2 + 100 + 30\sigma'\sqrt{\sigma'^2+4}}\,.$$

Mi riservo di esaminare in un ulteriore lavoro, come si è detto in principio, dettagliatamente il caso in cui la sollecitazione tangenziale massima si verifica nei punti interni di alcune corde.

In questo caso si potrebbe scrivere l'espressione di τ_z^2, che lungo una data corda è funzione della sola x, eguagliare a zero la derivata di τ_z^2 rispetto ad x e con opportuno processo di eliminazione di x ottenere il τ_z^2 massimo, quindi introdurre tale valore nell'espressione di σ'_i e seguendo la via fatta in questo lavoro ottenere la η in funzione (quasi certamente implicita) di σ' e τ'.

Applicazione del metodo Cross al calcolo dei telai a nodi spostabili

Nota dell'ing. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Dopo un breve richiamo al metodo Cross per il calcolo dei telai a nodi fissi, si considerano alcuni particolari spostamenti orizzontali dei nodi e la distribuzione di momenti prodotta in tutta la struttura da questi spostamenti e successivamente si determinano in base alle sole condizioni di equilibrio statico le forze esterne che sarebbero state necessarie a produrre tali spostamenti. Si vede quindi che con la sovrapposizione di alcuni spostamenti scelti opportunamente tra quelli avanti considerati si riesce ad equilibrare qualunque forza esterna orizzontale o dissimetria di carico o di struttura.

Fra i vari metodi adoperati per il calcolo di strutture aventi un alto grado di iperstaticità, uno che riesce particolarmente agevole in molti casi è quello americano del Cross. Allorquando si ha da fare con una struttura simmetrica, e simmetricamente caricata tale che non si debbano considerare spostamenti orizzontale dei nodi il metodo Cross si può applicare senz'altro come è stato indicato dal suo autore; ora vogliamo mostrare come anche quando si debba tener conto di spostamenti orizzontali dei nodi ci si possa con opportuni accorgimenti servire del metodo in parola conservando ancora alcuni dei principali vantaggi che esso presenta nel caso dei nodi fissi.

Per comodità del lettore richiamiamo qui brevemente il metodo Cross nel caso dei nodi fissi.

In una struttura comunque vincolata e caricata, per ogni membratura consideriamo i momenti che i carichi esterni produrrebbero alle estremità qualora queste fossero rigidamente incastrate. Assumeremo per i segni dei momenti d'incastro la convenzione di ritenere positivi i momenti che esercitati dal nodo sulla trave hanno senso antiorario e quindi momenti positivi agiscono sul nodo in senso orario.

In un primo tempo pensiamo di rendere rigidi tutti i nodi; contro spostamenti e contro rotazioni; allora le varie aste concorrenti in un nodo eserciterebbero su questo un momento pari alla somma algebrica dei momenti d'incastro avanti menzionati. Se questa somma è zero diremo che il nodo è in equilibrio, altrimenti essa costituirà il *momento squilibrato*.

Se ora immaginiamo di dare libertà di rotazione ad un nodo non equilibrato in esso si produrrà una rotazione tale da creare da parte delle

arte ivi concorrenti una somma di momenti reattivi uguale al momento squilibrato — ed ogni asta assumerà su di sè un momento inversamente proporzionale al proprio peso elastico.

Una volta resa libera di rotare l'estremità di un'asta, questa asta, tenuto conto che i nodi non subiscono spostamenti, andrà considerata come incastrata ad un estremo ed appoggiata all'altra, pertanto sappiamo immediatamente quale momento d'incastro M_1 si produce per l'applicazione dell'esterno di un momento M sull'appoggio (sarà $M_1 = \frac{1}{2} M$ se la trave è a sezione costante e con le nostre convenzioni sui segni); in generale si dirà fattore di trasporto il coefficiente M_1 / M.

Quindi rendendo libero di rotare un nodo non in equilibrio esso subisce una rotazione che serve ad equilibrarlo e si *trasporta* nell'altra estremità di ogni asta ivi concorrente un ulteriore momento d'incastro.

Se indichiamo con M il momento squilibrato, $w_1, \ldots, w_n$ i pesi elastici delle diverse aste concorrenti nel nodo, $k_1 \ldots, k_n$ i fattori di trasporto per ognuna di esse — il momento trasportato all'estremità della i^{ma} sarà ovviamente

$$M_i = \frac{M \cdot k_i}{w_i \cdot \sum \frac{1}{w}}$$

Dopo di che le operazioni da fare sono le seguenti:

1) Calcolo dei momenti d'incastro per ogni asta;

2) Calcolo del momento squilibrato in ogni nodo;

3) Aggiunta dall'esterno di un ipotetico momento capace di equilibrare ogni nodo, e ripartizione di tale momento tra le varie aste ivi concorrenti;

4) *Trasporto* di ognuno dei momenti precedentemente aggiunti alla estremità opposta; (così che nodi precedentemente equilibrati diventano nuovamente squilibrati);

5) Ripetizione successiva delle operazioni 3) e 4) tante volte fin quando il momento squilibrato in ogni nodo risulta talmente piccolo che si può trascurare.

Per intenderci diciamo che, abbiamo fatto un *giro* sul telaio quando abbiamo compiute successivamente un'operazione 3) ed un 4):

Possiamo assumere come indice dell'approssimazione raggiunta dopo un certo numero n di giri, indicandolo con E_n, la somma dei valori assoluti dei momenti squilibrati esistenti in ogni nodo. Osserviamo che nel caso delle aste di sezione costante il fattore di trasporto è $\frac{1}{2}$ e quindi essendo E_n minore o al più uguale alla somma dei valori assoluti dei mo-

menti trasportati in quel giro, che è uguale alla metà della somma dei momenti rimasti squilibrati nel giro precedente cioè, E_{n-1} risulta:

$$E_n \leq \frac{1}{2} E_{n-1} \quad , \qquad E_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} E_1$$

Queste relazioni ci danno una misura della rapidità con la quale proseguendo nei giri si vanno rimpiccolendo gli E_n.

Una volta conosciuti i momenti effettivamente prodotti all'estremità di ogni asta si può con sole considerazioni di equilibrio calcolare lo sforzo di taglio nelle medesime.

Ora per l'equilibrio alla traslazione di ogni corrente occorrerebbe che sia nulla la somma di tutti gli sforzi orizzontali verificantisi nelle estremità dei ritti terminanti sullo stesso corrente.

In generale tale condizione non è verificata quando la struttura è dissimetrica o dissimetricamente caricata e ciò induce degli spostamenti orizzontali dei nodi che non sempre possono venire trascurati.

Perciò il metodo Cross risulta a prima vista insufficiente sempre che occorra valutare l'azione di tali carichi dissimmetrici o addirittura di forze esterne orizzontali, ma con semplici accorgimenti si riesce ad utilizzarlo anche in questi casi,

Supponiamo ora di avere un telaio di un numero qualsivoglia di piani e consideriamo come fissi tutti i nodi di esso a meno di quelli di un piano ed imprimiamo a tutti questi nodi una traslazione δ considerando momentaneamente il traverso come rigido per tale traslazione i ritti aventi una estremità nei nodi spostati subiranno una deformazione per effetto della quale però, essendosi il traverso conservato rigido ed orizzontale, le tangenti estreme alle loro deformate rimangano verticali; esaminiamo ora il sistema di forze esterne da applicare al telaio per realizzare questo tipo di deformazione.

Indichiamo con h_i l'altezza dei ritti aventi l'estremità superiore al piano i^{mo} e numerandoli p. es. a partire dalla sinistra sia $I_{i,k}$ il momento d'inerzia dell'k^{mo} ritto dal piano i^{mo}. Qualora noi spostiamo il corrente i^{mo}, considerando come fissi i nodi dei correnti $(i+1)^{mo}$ ed $(i-1)^{mo}$, e come rigido il corrente stesso, tutti i ritti deformati presenteranno un flesso nel punto medio e per ottenere che uno generico di essi abbia una freccia δ è noto che dovrà subire all'estremità un momento M_{ik} espresso da

$$M_{ik} = \frac{6 E I_{ik} \delta}{h_i^2} = 6 \delta \cdot \frac{\alpha_{ik}}{h_i}$$

(dove con α_{ik} si è indicata la deformabilità, inverso del peso elastico, del ritto i, k).

Quindi prescindendo dal fattore costante 6δ, dovremo applicare alle due estremità di ogni ritto del piano i^{mo} un momento proporzionale alla sua deformalità divisa per l'altezza.

Una volta applicati tali momenti nei nodi dei piani $(i+1)^{mo}$, i^{mo} e $(i-1)^{mo}$ avremo una distribuzione non equilibrata, e mediante il metodo avanti esposto potremo vedere in qual modo si ripartisce in tutta la struttura e quali forze orizzontali sarebbe necessario applicare all'estremità di ogni corrente per equilibrarla.

Indicheremo queste forze con

$$H_{i1} \ldots\ldots H_{in}.$$

Esercitiamo lo spostamento di ognuno dei correnti e ogni volta determiniamo le H necessarie ad equilibrare questa deformazione. Poichè la configurazione assunta realmente dalla nostra struttura è equilibrata con spinte nulle (o uguale alle forze esterne S_i già note) e può considerarsi come la sovraprosizione di stati simili ai precedenti in cui gli spostamenti invece di essere δ saranno realmente $\eta_i \cdot \delta$ avremo che dovranno essere verificate le condizioni

$$(1) \qquad \eta_1 H_{1i} + \eta_2 H_{2i} + \eta_3 H_{3i} \ldots\ldots + \eta_n H_{ni} = S_i \qquad i = 1 \ldots n$$

che esprimono l'equilibrio alla traslazione di ogni corrente.

Il sistema (1) ha tante incognite quanti sono i piani ed una volta risolto ci farà conoscere senz'altro i momenti all'estremità delle singole aste. Rileviamo che quando gli spostamenti impressi inizialmente ai singoli correnti sono tutti uguali dal principio di reciprocità si ricava immediatamente che

$$H_{ij} = H_{ji},$$

cioè che il sistema (1) è simmetrico; inoltre per ogni equazione il coefficiente più grande in valore assoluto è quello che sta sulla diagonale principale. In tali circostanze si può ottenere agevolmente la soluzione del sistema col metodo delle successive approssimazioni.

Dopo quanto si è detto considerando una delle estremità di un'asta generica diciamo M_o il momento che si avrebbe in essa se i nodi fossero fissi ed M_i quello precedentemente valutato, che vi si genera allorchè si produce uno spostamento di δ del piano i^{mo}, il momento effettivo in essa è

$$M = M_o + \sum_1^n \eta_i M_i$$

BIBLIOGRAFIA

H. Cross, *Analises of continuous frames by distributing fixed end moments.* Proc. of Amer. Soc. of civ. Eng. Paper 1930, p. 914.

A. Melles, *Die Berechnung des Ifostent Trägers mit gleichen Gusten nach Doppel stab. Verfahren.* Beton und lisen 1941 in 19, p. 254.

H. A. Williams, *The application of the* A. Cross *method of moment. Distribution* Transactions of the Ann. Soc. of Mecc. Eng. Vol. 56 n. 5. Maggio 1934, p. 305.

W. Dernedde, *Nähemugsweise Berechnung von durchlaufenden Trägern und Rahmen.* Der Baunigenieur, febbraio 1938, pag. 45.

Considerazioni sulla distribuzione delle tensioni tangenziali negli archi piani a grande curvatura.

Nota dell'ing. **Franco Mazzarella** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Nel presente lavoro si ricavano alcune proprietà relative alla distribuzione delle tensioni tangenziali in un arco piano a grande curvatura, partendo dalle formule stabilite dal Ricci e si esamina particolarmente il caso della sezione rettangolare.

Ci riferiamo, come si fa generalmente nella trattazione degli archi piani a grande curvatura ad un solido generato da un'area piana A, la quale rimanendo di dimensioni e forma costante si muove in modo che il suo piano si mantiene sempre normale ad una curva s, che rappresenta l'asse del solido; s è la traiettoria del baricentro di A, e riteniamo che il piano di tale curva contenga sempre gli assi pricipali d'inerzia di A.

Indicheremo con r il raggio di curvatura di s in un suo punto generico, e con $d\varphi$ l'angolo di contingenza.

Nello studiare una determinata sezione del solido ci riferiamo ad una terna di assi cartesiani ortogonali u, v, t con l'origine nel baricentro della sezione e tali che v e t siano la normale e la tangente ad s.

Indicheremo ancora con

N lo sforzo normale alla sezione, diretto secondo t;

T, lo sforzo del taglio diretto secondo v;

M il momento flettente;

$\varkappa$ il fattore di forma che interviene in questa trattazione e che notoriamente è dato da

$$\varkappa = -\frac{1}{A}\int_A \frac{v}{r+v}\,dA$$

e ricordiamo che la distribuzione delle tensioni normali è data dalla nota formula:

$$\sigma_t = \frac{1}{A}\left[N + \frac{M}{r}\,\frac{1+\varkappa}{\varkappa} - \frac{M}{\varkappa(v+r)}\right]$$

dalla quale si rileva subito che, a differenza di quanto avviene per i solidi ad asse rettilineo, nel caso di sforzo normale nullo l'asse neutro non

è baricentrico ma si trova sulla retta di equazione $v = v^*$ dove

$$v_* = -r\,\frac{\varkappa}{\varkappa+1}$$

La formula che dà il valor medio di τ_{tv} (cfr. C. L. Ricci «Complementi alla teoria statica degli archi piani a grande curvatura» Memoria della R. Acc. d'Italia — Classe Scienze Fisiche, Mat. e Nat. vol. III 1932) lungo una generica corda parallela all'asse delle u, di ordinata v, e la cui lunghezza indichiamo con b, è la seguente:

$$\tau_{tv} = \frac{1}{\varkappa A\, b\,(r+v)^2}\left\{ T\,\mathfrak{M}_0 - \frac{M}{r}\,\frac{\partial r}{\partial \varphi}\left[\int_{A_0}\left(\frac{v}{r+v}+\varkappa+\frac{v\,\alpha}{r}\right) dA\right\}\right. \qquad (1)$$

dove abbiamo indicato con A_0 una delle due parti in cui l'area A resta divisa dalla corda che si considera, $\mathfrak{M}_0$ il momento statico di A_0 rispetto all'asse u e con α l'espressione

$$\alpha = 1+\varkappa+\frac{r}{\varkappa}\,\frac{\partial \varkappa}{\partial r} = \frac{r}{A}\int_A \frac{r+v+\dfrac{v}{\varkappa}}{(r+v)^2}\,dA = \varkappa - \frac{1}{A\varkappa}\int_A \frac{v^2}{(r+v)^2}\,dA$$

l'ultima espressione data per α ci permette di assicurarci che α è un numero certamente negativo. Infatti, è noto che tra due funzioni generiche f_1 ed f_2 della variabile v sussiste la seguente disuguaglianza di Schwartz, (dove gli integrali si intendono estesi ad un qualsiasi intervallo)

$$\left[\int f_1 \cdot f_2\, dv\right]^2 < \int f_1^2\, dv \cdot \int f_2^2\, dv$$

poniamo

$$f_1(v) = \sqrt{b} \quad , \quad f_2(v) = \frac{v}{r+v}\cdot\sqrt{b}$$

ed abbiamo

$$\left[\int \frac{v}{r+v}\; b\, dv\right]^2 < \int b\, dv \cdot \int \frac{v^2}{(r+v)^2}\, b\, dv$$

da cui

$$A^2\varkappa^2 < A\int \frac{v^2}{(r+v)^2}\,dA \quad , \quad \varkappa - \frac{1}{A\varkappa}\int \frac{v^2}{(r+v)^2}\,dA < 0.$$

Per esaminare l'andamento di τ_{tv} introduciamo in (1) la lunghezza definita da

$$\delta = \frac{M}{r\,T}\,\frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

ed allora abbiamo

$$\tau_{tv} = \frac{T}{\varkappa A b (r+v)^2} \left\{ \mathfrak{M}_0 - \delta \int_{Av} \frac{\alpha v^2 + (\alpha + \varkappa + 1) v r + \varkappa r^2}{r(r+v)} \, dA \right\}$$

Ci conviene ora di considerare la τ_{tv} come somma di due sollecitazioni che chiameremo τ_1 e τ_2, di cui τ_1 è la parte di τ_{tv} indipendentemente da δ e τ_2 la rimanente.

E rileviamo così che τ_1 dipende unicamente dallo sforzo di taglio, mentre τ_2 è provocata dal momento flettente e si annulla sempre che la curvatura di s si mantiene costante.

Osserviamo subito l'analogia intercorrente tra τ_1 e la nota formula che dà τ_{yz} nei solidi ad asse rettilineo, ed anzi tenendo conto che passando al limite per $r = \infty$ si ha

$$\lim_{r \to \infty} \varkappa r^2 A = I$$

troviamo che la τ_1 si riduce per $r = \infty$ proprio alla formula ora accennata. Determiniamo ora per quale valore V di v, τ_1 raggiunge il suo massimo; scriviamo la $\frac{d\tau_1}{dv}$ ed eguagliamola a zero; abbiamo

$$\frac{d\tau_1}{dv} = \frac{T}{A\varkappa} \frac{-b^2 v (r+v) - \left[2b + (r+v) \frac{db}{dv} \right] \int_v^{v_1} b v \, dv}{b^2 (r+v)^3}$$

e quindi V sarà la radice dell'equazione

$$b v + \left[\frac{2}{r+v} + \frac{1}{b} \frac{db}{dv} \right] \int_v^{v_1} v b \, dv = 0 \qquad (2)$$

(Indichiamo con v_1 e v_2 le ordinate estreme della sezione).

Se nella sezione del nostro solido le corde diventano più corte procedendo dal bordo verso il centro (almeno nella zona corrispondente alle v positive) vuol dire che è $\frac{db}{dv} > 0$ e quindi il primo membro di (2) si annulla per un valore certamente negativo.

Supponiamo invece che le corde vadano allungandosi procedendo verso il centro, ma il contorno della sezione sia convesso il che significa

$$\frac{db}{dv} < 0 \qquad \frac{d^2 b}{dv^2} < 0$$

allora $$\frac{d}{dv}\left[\frac{2}{r+v}+\frac{1}{b}\frac{dv}{dv}\right]=\frac{-2}{(r+v)^2}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{db}{dv}\right)^2+\frac{1}{b}\frac{d^2b}{dv^2}<0$$

e se sul bordo (o in un punto generico) $\frac{2}{(r+v)^2}+\frac{1}{b^2}\frac{db}{dv}$ è positivo ciò ci basta per essere sicuri che anche in questo caso la soluzione della (1) cade nella zona di v negative, cioè al disotto del baricentro.

Nel caso particolare che la sezione sia un rettangolo di base b ed altezza $2h$ sappiamo che

$$\varkappa=\frac{r}{2h}\log\frac{r+h}{r-h}-1$$

la (2) diventa

$$v+\frac{1}{r+v}(h^2-v^2)=0$$

$$v=-\frac{h^2}{r}$$

da cui

$$\tau_{1\,max}=\frac{T}{2A\varkappa}\frac{h^2}{r^2-h^2}=\tau_{media}\frac{h^2}{2\varkappa(r^2-h^2)}$$

$$\tau_1=\frac{T}{A\varkappa}-\frac{h^2-v^2}{2(r+v)^2}.$$

Nel caso di una sezione di forma circolare di raggio R sappiamo (vedi in fine)

$$\varkappa=\left(\frac{r-\sqrt{r^2-R^2}}{R}\right)^2$$

e che $M_0=\frac{1}{12}b^3$ e quindi τ_1 è data da $\tau_1=\frac{T}{A\varkappa}\frac{R^2-v^2}{3(r+v)^2}$, ed il suo massimo si ha per $v=-\frac{R^2}{2}$ col valore di

$$\tau_{1\,max}=\frac{T}{A}\frac{(r+\sqrt{r^2-R^2})^2}{3(r+R)(r-R)}.$$

Circa la τ_2 rileviamo che deve essere $\int_A \tau_2\,dA=0$, poichè essendo la τ_2 provocata dal momento flettente la risultante delle forze elementari $\tau_2\,dA$ deve essere nulla, questo dice che la τ_2 non conserva lo stesso segno su tutta la sezione, esiste quindi una corda parallela all'asse u lungo la

quale si verifica il cambiamento di segno, dove $\tau_2 = o$ e che possiamo considerare come un asse neutro di questa sollecitazione, sia $v = V$ l'equazione di tale asse neutro, V sarà quel valore che verifica l'equazione

$$F(v) = \int_{v_1}^{v} \frac{\alpha v^2 + (\alpha + \varkappa + 1) vr + \varkappa r^2}{r(v + r)} b dv = 0 \qquad (3)$$

inoltre, in valore assoluto, τ_2 presenta due massimi la cui posizione si determina evidentemente risolvendo l'equazione $\frac{d\tau_2}{dv} = 0$. Questa equazione in generale si presenta piuttosto complicata e senza fare delle ipotesi restrittive sul variare di b dal suo esame non si trae nessuna utile indicazione. Perciò consideriamo il caso della sezione rettangolare di base b ed altezza $2h$, in essa si ha

$$\alpha = -\frac{1}{\varkappa}\frac{r^2}{r^2 - h^2} + \frac{r}{2h}\left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right)\log\frac{r+h}{r-h} = 2 + \varkappa - \frac{h^2}{(r^2 - h^2)\varkappa}$$

$$F(v) = h\left\{\frac{h-v}{r}\left[\frac{(h+v)\alpha}{r} + \varkappa + 1\right] + \log\frac{v+r}{h+r}\right\}$$

ed il valore di V corrispondente all'asse neutro si può determinare considerando le tre intersezioni di una parabola con una curva logaritmica.

Una volta tracciata la curva logaritmica $y = \log\frac{v+r}{r+h}$ sapendo che $F(h) = F(-h) = 0$ sappiamo già due punti per cui passerà la parabola

$$y = \frac{v-h}{r}\left[\frac{\alpha h + \alpha v}{2r} + \varkappa + 1\right]$$

che con la sua terza intersezione con la prima curva ci dà il valore di v — notando che la parabola taglia l'asse delle y nel punto di ordinata

$$y = \frac{-h}{r}\left(\alpha\frac{h}{2r} + \varkappa + 1\right)$$

abbiamo un terzo di essa e quindi siamo in grado di disegnarla agevolmente.

Abbiamo in fine riportati i valori che assumono $\varkappa$ ed α per una sezione rettangolare in cui $h = 1$, per i valori r da 2 a 30.

Abbiamo ancora

$$\tau_2 = -\frac{M}{2bh\varkappa}\cdot\frac{\partial r}{\partial\varphi}\frac{1}{(r+v)^2}\left[\frac{h-v}{2}\left(\frac{\alpha h + \alpha v}{2r} + \varkappa + 1\right) + lg\,\frac{v+r}{h+r}\right]$$

Generalmente si verificano contemporaneamente τ_1 e τ_2 e quindi la presenza della τ_1 fa spostare l'asse neutro della τ_2. In questa distribu-

zione di tensioni tangenziali si nota subito un'analogia con quella delle tensioni normali nel caso della pressoflessione e, così come nella pressoflessione si ha una polarità tra centro di pressione ed asse neutro, qui si potrebbe stabilire una corrispondenza tra il punto dell'asse v di coordinate (0 e δ) e l'asse neutro; evidentemente questa non sarà nè lineare nè reciproca.

Si possono determinare due valori δ_1 e δ_2 tali che sempre che

$$\delta_1 > \delta > \delta_2$$

l'asse neutro è esterno alla sezione, in caso contrario è interno. E propriamente giungiamo a ciò colla seguente osservazione.

Dalla (3) ricaviamo che l'asse neutro cade per quel valore di v che soddisfa all'equazione

$$F(v) = \int_v^{r_1} v - \delta \frac{\alpha v^2 + (\alpha + \varkappa - 1) vr + \varkappa r^2}{r(r+v)} b dv = 0. \qquad (4)$$

Ora sappiamo che la (4) è sempre soddisfatta per $v = v_1$ e $v = v_2$, se l'asse neutro dovrà cadere in v_1 o v_2 in tal punto dovremo avere una soluzione doppia e quindi

$$F'(v_1) = 0 \quad \text{o} \quad F'(v_2) = 0 \qquad (5)$$

Ricercando quei valori di δ che rendono soddisfatte le (5) si ottengono δ_1 e δ_2. Facciamo anche ora il calcolo per la sezione rettangolare

$$F(v) = \frac{h^2 - v^2}{2} - \delta \left[\frac{h^2 - v^2}{2} \cdot \frac{\alpha}{r} + (\varkappa + 1)(h - v) - r \log \frac{h + r}{v + r} \right]$$

$$F'(v) = -v - \delta \left[-\frac{\alpha}{r} v - (\varkappa + 1) + \frac{r}{v + 2} \right]$$

$$F'(h) = -h - \delta \left[-\frac{\alpha}{r} h - (\varkappa + 1) + \frac{r}{h + r} \right]; \quad F'(-h) = h - \delta \left[\frac{\alpha}{r} h - (\varkappa + 1) + \frac{r}{r - h} \right]$$

da cui abbiamo

$$\delta_1 = -\frac{h}{-\frac{\alpha}{r} h - (\varkappa + 1) + \frac{r}{h + r}} = \frac{h r (r^2 - h^2)}{-3r^2 h + h^2 r + 2h^3 + \frac{h^3}{\varkappa} + \varkappa(-r^3 - 2hr^2 + h^2 r + 2h^3)}$$

$$\delta_2 = \frac{-h}{\frac{\alpha}{r} h - (\varkappa + 1) + \frac{r}{r - h}} = \frac{h r (r^2 - h^2)}{-3r^2 h - h^2 r + 2h^3 + \frac{h^3}{\varkappa} + \varkappa(r^3 - hr^2 - rh^2 + h^3)}$$

Valori di $\varkappa$ e di α per la sezione rettangolare di altezza $h = 2$

$\nu =$	$\varkappa =$	$\alpha =$
2	0,09861223	— 1,2816811
3	0,03972072	— 1,1072480
4	0,02165122	— 1,0574642
5	0,01366272	— 1,0359861
6	0,00941669	— 1,0247001
7	0,00688724	— 1,0180281
8	0,00525768	— 1,0137345
9	0,00414633	— 1,0108264
10	0,00335345	— 1,0087714
11	0,00276803	— 1,0071981
12	0,00232436	— 1,0060166
13	0,00197942	— 1,0051544
14	0,00170596	— 1,0044874
15	0,00148527	— 1,0039075
16	0,00130804	— 1,0034520
17	0,00115584	— 1,0029124
18	0,00103067	— 1,0025542
19	0,00092484	— 1,0023490
20	0,00083450	— 1,0021738
21	0,00075668	— 1,0019695
22	0,00068969	— 1,0017944
23	0,00063087	— 1,0016461
24	0,00057932	— 1,0015032
25	0,00053387	— 1,0013868
26	0,00049326	— 0,0012867
27	0,00045746	— 1,0011862
28	0,00042572	— 1,0011049
29	0,00039647	— 1,0010303
30	0,00037040	— 1,0009638

NOTA. — Calcolo del coefficiente $\varkappa$ per la sezione circolare — (o ellittica).
Sia R il raggio della sezione trasversale ed r il raggio di curvatura, abbiamo che

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}\frac{v}{r+v}\,b\,dv = -\frac{1}{\pi R^2}\left[\pi R^2 - r\int_{-R}^{R}\frac{b\,dv}{r+v}\right] = -1+\frac{2r}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}\frac{(R^2-v^2)^{\frac{1}{2}}}{r+v}\,dv$$

posto:

$$\frac{r}{R} = a \quad \text{e} \quad v = \frac{2z}{1+z^2}R$$

da cui:

$$dv = 2R\,\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz\,; \qquad \sqrt{R^2-v^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,R$$

si ha:

$$\varkappa = -1 + \frac{4r}{\pi R^2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2}\cdot\frac{dz}{a+2z+az^2} =$$

$$-1+\frac{4\pi}{\pi R}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{1-a^2}{a+2z+az^2}\,dz+\int_{-1}^{1}\frac{a\,dz}{1+z^2}-2\int_{-1}^{1}\frac{z\,dz}{(1+z^2)}\right\}=\left(\frac{r-\sqrt{r^2-R^2}}{R}\right)^2.$$

Evidentemente tale espressione vale immutata per una sezione di forma ellittica in cui sia R il semidiametro distesso sull'asse v.

La determinazione del coefficiente $\varkappa$ par la sezione circolare si trova già fatta da altri Autori, ma ho creduto utile riportare il calcolo perchè la via qui seguita risulta più spedita di quella indicata altrove.

Su gli aloni
(Risultati di osservazioni eseguite in Napoli dal 1922 al 1939).

Nota del prof. **Giovanni Platania**, *presentata dal socio* **A. Carrelli**.

(Adunanza del dì 7 febbraio 1942 - XX)

Pour arriver à bien comprendre ces phénomènes (les halos), il faut les bien connaître et pour les bien connaître il faut beaucoup de temps, car plusieurs d'entre eux sont fort rares et la plupart ne fait que des courtes apparitions.

L. Besson

Sunto. — Dopo una statistica dettagliata dei varî fenomeni alonari osservati a Napoli nel periodo di 18 anni, facenti seguito ad altra serie osservata precedentemente dallo stesso autore a Catania, da cui si deduce un andamento periodico della frequenza nel corso dell'anno, vengono descritti alcuni fenomeni osservati dei tipi relativamente considerati come molto rari.

Nel 1910 cominciai in Catania osservazioni regolari di fenomeni ottici, dapprima di polarizzazione atmosferica, continuate per nove anni; poi di altri fenomeni ottici dell'atmosfera, particolarmente di aloni.

Intorno ai risultati delle osservazioni di polarizzazione atmosferica presentai alla R. Accademia dei Lincei una memoria che fu pubblicata nel 1923 [1]).

Sui fenomeni alonari io intrapresi dapprima in Catania osservazioni regolari negli anni 1914 a 1919. Chiamato a Roma, in fine del 1919, a prestar servizio presso il Ministero della Marina, dovetti interrompere per due anni le su dette osservazioni, che poi ripresi in Napoli nel gennaio del 1922, continuandole fino al dicembre del 1939.

Su questi fenomeni ho pubblicato una nota nel Bollettino della Società dei Naturalisti nel 1928 [2]), e sui risultati del decennio 1922-1931 una memoria negli Annali del R. Istituto Universitario Navale [3]).

---

[1]) G. Platania, *Risultati delle osservazioni di polarizzazione atmosferica eseguite in Catania negli anni 1910-18*. Memorie R. Acc. Lincei, cl. scienze fisiche (5) XIV. Roma, 1923.

[2]) G. Platania, *Un dodicennio di osservazioni eseguite in Catania e in Napoli sulle meteore ottiche*. Boll. Soc. Naturalisti, XL. Napoli, 1928.

[3]) G. Platania, *Osservazioni di aloni in Napoli nel decennio 1922-1931*. Annali R. Istituto Superiore Navale. Vol. I, Napoli, 1932.

Ho dato conto in quelle pubblicazioni dei giorni in cui si osservò l'alone solare ordinario di 22°, l'alone straordinario di 46°, l'alone lunare, i parelii di 22°, ecc., insomma tutti gli altri fenomeni ottici connessi con gli aloni.

Furono date anche le altezze solari per controllo della teoria in riguardo ai parelii, agli archi tangenti all'alone di 22°, ai complessi alonari.

Le altre determinazioni degli ultimi anni, dal 1932 sino al dicembre del 1939, sono inedite.

In questa memoria faccio appunto la statistica di tutti i fenomeni alonari che io ho osservato in Napoli, nei diciotto anni dal 1922 al 1939.

1 9 2 2

Alone solare di 22°: I 7 — II 2, 4, 5 — III 4, 15, 12 — IV 28 — V 20, 30 — VI 24 — IX 28 — X 9, 13, 18, 29 — XI 10, 12, 13 — XII 2, 10, 24.

Alone lunare: I 4, 7 — II 12 — III 30 — IV 10 — VI 8, 9 — XI 3 — XII 2.

Parelii: XII 24.

1 9 2 3

Alone solare di 22°: I 2, 9, 14 — II 8, 15, 16, 22 — III 13, 21, 22, 24 — IV 19, 20 — VII 4 — X 8, 9, 14 — XI 2, 18, 24, 26.

Alone lunare: I 22 — III 5, 22, 31 — — XII 13, 22, 28.

1 9 2 4

Alone solare di 22°: I 12, 25, 28 — III 3, 18, 20, 25 — IV 15, 16, 17 — V 4, 7 — VI 4, 22, 23 — VIII 15 — X 1, 2, 18, 25 — XI 2, 6, 20, 27 — XII 6, 31.

Alone lunare: I 12, 19 — III 23 — IV 15, 16 — VIII 12 — XI 11 — XII 6, 7, 8, 9, 31.

Parelii: I 28 — VI 15 — XII 31.

Paraseleni: III 23.

1 9 2 5

Alone solare di 22°: I 21, 27 — II 11 — III 2 — IX 7, 9, 30 — V 1, 2, 23, 31 — VI 14, 15, 17, 30 — VII 9 — VIII 5 — IX 13, 27 — XII 19, 22

Alone lunare: IV 30 — V 1, 2, 4, 8 — IX 9.

Parelii: III 2.

Arco tg superiore: III 2.

1 9 2 6

Alone solare di 22°: I 19, 24 — III 21, 22, 23, 26 — IV 16, 22, 30 — V 3 — VI 2, 3, 13, 17, 25, 27 — VII 6 — VIII 4 — X 26, 30 — XI 2, 23, 29 — XII 16, 26, 28.

Alone lunare: I 24, 25 — III 1, 23 — IV 18, 23, 25 — VI 18, 21.
Parelii: III 26.
Arco tg superiore: VI 2.

1 9 2 7

Alone solare di 22°: I 5, 14, 25 — II 1, 3, 4, 6, 16, 24, 25, 27 — III 1, 2, 31 — IV 1. 3, 30 — V 1, 2, 8, 9, 15, 20, 27, 29 — VI 3, 15, 17, 27, 29 — VII 8, 18 — VIII 8 — IX 7, 9, 12, 15, 16, 24. 29, 30 — X 48, 22 — XI 25, 27 XII 3, 4, 6. 8, 19, 24.
Alone lunare: I 14 — II 15, 16 — III 12, 16 — IV 11, 12 — V 11, 14 — IX 13 — XI 5 — XII 1, 4, 5.
Parelii: IX 16 — XI 27 — XII 3, 6, 8.
Arco tg superiore: I 25.

1 9 2 8

Alone solare di 22°: I 19, 28, 29 — III 3, 9, 13, 23 — IV 2, 3, 5, 6, 15, 19, 20, 27 — V 5, 6, 11, 14 — VI 2, 3, 5, 6, 11, 20 — IX 3, 4, 5, 13, 14, 16, 26, 28 — X 3, 10, 20, 28 — XI 5, 7, 8, 15 — XII 18, 20.
Alone lunare: III 3, 4 — IV 7 — VI 1 — IX 2 — XI 22, 23, 25.
Parelii: IV 3, 15, 27 — XII 26.
Arco tg superiore: IV 27.
Arco tg inferiore: IV 27.
Arco tg infralaterale dell' alone di 46°: IV 27.

1 9 2 9

Alone solare di 22°: II 16, 26, 27 — IV 10, 14, 22 — V 6, 7, 10, 11, 12, 22, 26 — VI 9, 11, 23 — VII 1, 19 — VIII 9, 11, 12, 13, 15, 16 — IX 9, 10, 11, 17, 20 — X 7 — XI 3, 9, 23, 24 — XII 20.
Alone lunare: I 22, 23 — II 16, 23, 25 — IV 14 — V 19, 20 — VI 17, 19.
Parelii di 22°: X 24.
Arco tangente superiore dell' alone di 22°: V 6 — X 7 — XII 20.

1 9 3 0

Alone solare di 22°: I 24, 25 — II 17 — III 4, 9, 14, 21, 22, 23 — IV 1, 2, 3, 7, 18, 24 — V 3, 5, 7, 8, 21, 24, 30 — VI 1, 4, 26, 27 — VII 2, 23 — IX 12, 14, 16, 17 — X 3, 26, 27, 30 — XI 8, 24, 27 — XII 22.
Alone lunare: II 8, 9 — IV 7 — V 6, 10 — VI 4 — X 4, 5, 7 — XII 8, 9.
Parelii di 22°: IV 3 — V 30 — IX 6 — X 30.

1 9 3 1

Alone solare di 22°: I 4, 9, 24 — II 16, 24 — III 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29 — IV 6, 7, 13, 24, 30 — V 5, 23 — VI 1, 6 — VII 7, 24 — VIII 7 — IX 11, 24 — X 13, 14, 22, 25 — XI 6, 13, 17, 24, 26 - XII 10, 12, 19, 31.

Alone lunare: I 4, 5 — III 28 — XII 18, 24.

Parelii di 22°: I 21 — II 16 — VI 29 — IX 11, 24 — XI 11, 21.

Arco tangente dell' alone di 22°: IX 11.

Arco circumzenitale: IX 11.

1 9 3 2

Alone solare di 22°: I 8, 17, 19 — II 23, 24 — III 13, 16, 20, 22, 26, 29 — IV 1, 2, 3, 14, 15, 19, 22 — V 4, 14, 18, 25, 31 — VI 1, 10, 29 — IX 4, 12, 14, 26, 30 — X 1, 16, 19 — XI 8, 11, 19, 20, 29 — XII 8, 9, 11, 12, 16, 20, 26.

Alone solare di 46°: III 22.

Alone lunare: II 23, 24 — III 16 — XI 7, 8 — XII 8, 11, 12, 13.

Parelii di 22°: iII 22 — XII 11, 20.

Arco tg superiore dell' alone di 22°: II 25 — III 22.

Cerchio circumzenitale: II 25 — III 22.

1 9 3 3

Alone solare di 22°: I 1, 3, 6, 11, 28, 29 — II 10, 11, 23 — III 5, 9, 10, 16, 17, 20, 21 — IV 1, 7, 10, 20 — V 1, 7, 8, 19, 22, 24, 29 — VI 1, 22 — VII 8, 24 — VIII 4, 6, 26, 30 — IX 1, 2, 10, 11, 12 — X 33 — XI 3, 7, 14, 30 — XII 3, 12, 30, 31.

Alone lunare: I 3, 6, 7, 12, 14 — II 11 — III 8, 9, 10, 11, 16 — IV 7, 14 — X 28 — XI 2, 3, 6, 7 — XII 29, 30.

Parelii di 22°: III 10, 17 — VIII 26 — XI 19, 20.

Arco tg superiore dell' alone di 22°: I 19 — III 10.

Cerchio circumzenitale: III 10.

Complesso alonare: III 10.

1 9 3 4

Alone solare di 22°: I 2, 6, 12 — II 3, 27 — III 6, 11, 21, 22, 24, 25 — IV 5, 6, 8, 10, 11, 19, 20, 21, 24, 25, 28 — V 7, 11, 12, 15, 16, 20, 21, 28, 31 — VI 3, 4, 5, 8, 16 — VIII 7, 8, 9 — IX 1, 9, 12, 13, 16, 25 — X 10, 14, 16, 20, 24, 30 — XI 3 — XII 12, 23, 24, 25, 29.

Alone lunare: II 4, 24 — III 24, 25 — V 30, 31 — XI 17, 18, 19 — XII 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Parelii di 22°: III 6 — IV 20 — V 28 — IX 1 — XII 29.

Paraseleni: V 31.

Colonna di Bravais: III 6.

1 9 3 5

Alone solare di 22°: I 1, 27, 28 — II 11, 12, 15, 22 — III 10, 11, 16, 29 — IV 4, 14, 16, 18, 22, 24, 27, 29 — V 2, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 21, 28, 29 — VI 2, 5, 17, 18, 21 — VII 4, 11, 14 — VIII 19, 31 — IX 4, 5, 10, 11, 13 — X 1, 7, 8, 28 — XI 8, 21, 25 — XII 7, 19, 23, 24, 30, 31.

Alone solare di 46°: IV 16.

Alone lunare: II 14 — IV 16 — V 10, 11, 15 — IX 13 — XI 8, 9, 11 12, 13.

Parelii: II 2, 12 — III 10, 29 — IV 4, 16, 22 — V 6, 9, 11 — VI 17, 18 — VII 14 — IX 10, 11.

Paraseleni: IX 13.

Arco tg. superiore dell' alone di 22°: V 5, 6, 9.

1 9 3 6

Alone solare di 22°: I 14, 16, 17, 22, 23, 25, 27, 29 — II 4, 21, 22 — III 2, 7, 11, 13, 25, 26 — IV 2, 7, 10, 11, 15, 19, 28 — V 6, 7, 10, 21, 27 — VI 3, 5, 9, 16, 17, 27 — VII 8, 13 — IX 5, 14 — X 14 — XI 3, 9, 11, 16, 20 — XII 7, 10, 12.

Alone lunare: I 7, 31 — II 2, 3, 4, 6 — III 1, 9, 10, 11 — IV 5, 6 — XI 27, 28, 29, 30.

Parelii di 22°: I 22, 23 — II 4 — III 1, 7 — V 6, 10 — VI 17, 27 — VIII 18 (senza alone) — X 21 (senza alone) — XII 7.

Antelio: XI 8.

Arco tg superiore dell'alone di 22°: II 4 — III 1 — V 7 — VII 13.

1 9 3 7

Alone solare di 22° — I 27 — III 1, 8, 15, 17, 18, 27, 28, 30, 31 — IV 3, 7, 10, 11, 13, 18, 19, 20, 30 — V 12, 16, 19 — VI 3, 9 — VIII 24, 28 — IX 18, 24, 25, 27 — XI 30 — XII 5, 10, 27.

Alone lunare: II 21 — III 26 — V 24 — XI 22, 23.

Parelii: III 5, 27 — IV 19, 30 — IX 25 — XI 30 — XII 19.

Paraseleni: III 26 — V 24.

Arco tg. superiore: IV 19 — V 19 — VIII 28.

1 9 3 8

Alone solare di 22°: I 4, 29, 30 — II 10, 13 — III 1, 20, 21, 23 — IV 8, 28 — V 8, 17, 19, 24, 29 — VI 2 — IX 17, 25 — XI 21, 22 — XII 6, 11, 12, 13, 14, 24, 28.

Alone lunare: I 16 — IX 18 — XII 9.

Parelii: II 13 — III 1, 20, 21 — IV 28 — V 7, 29 — XII 2, 12, 24, 26.
Arco lg. superiore: IV 28 — XIII 24.
Arco tg. inferiore: IV 28.

1939

Alone solare di 22°: I 14, 16, 18, 19, 29 — II 24 — III 5, 9, 18, 19, 21, 22 — IV 1, 2, 5, 15, 16, 17, 29 — V 1, 9, 18. 19, 20 — VI 12, 13 — VIII 5, 22 — IX 2, 8, 14, 20, 21 — X 20 — XI 2, 29 — XII 9, 17, 18, 20.
Alone lunare: I 31 — IV 2, 3 — VIII 27 — IX 1, 7 — X 19.
Parelii: I 29 — II 19 — III 22, 23 — IV 2, 9 — XI 29 — XII 9.
Paraseleni: IV 2.
Arco tg. superiore: IV 2.

Nella seguente tabella è notato, per ogni mese e ogni anno, il numero dei giorni in cui si osservarono fenomeni alonari di qualunque tipo, e i totali mensili, per il periodo in esame:

Tab. I.

	G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	A.	S.	O.	N.	D.	Anno
1922	2	4	4	2	2	3	—	—	1	4	3	3	29
23	6	4	7	2	—	—	1	—	—	3	4	3	30
24	4	—	5	3	2	4	—	2	—	4	5	5	34
25	2	1	1	3	6	4	1	1	3	—	1	2	*25*
26	3	—	5	5	1	8	2	1	—	2	3	3	33
27	3	9	5	3	10	6	2	1	9	2	3	8	63
28	3	—	5	9	4	7	—	—	9	4	7	4	52
29	2	5	—	3	9	5	2	6	5	2	4	1	44
30	2	3	6	6	9	5	2	—	5	7	3	3	51
31	5	2	9	5	2	2	2	1	2	4	7	6	47
32	3	3	6	7	5	3	—	—	5	3	6	8	49
33	10	3	9	5	7	2	2	4	5	2	9	4	62
34	3	4	6	11	10	5	—	3	6	6	4	9	**67**
35	3	6	4	9	11	5	3	2	5	4	7	6	65
36	10	6	10	9	5	6	3	1	2	2	10	3	**67**
37	1	1	11	9	4	2	—	2	4	—	3	4	41
38	4	2	4	2	6	1	—	—	3	—	2	10	34
39	7	2	7	9	5	2	—	3	7	1	10	4	49
Totali	73	55	**104**	**104**	98	70	*20*	27	71	50	92	78	842

Esaminando il numero dei giorni in cui fu osservato l'alone, riportati in questa tab. I, si scorge la grande variabilità della frequenza del feno-

meno da un anno all'altro; il massimo si è avuto nel '34 e nel '36, con 67 giorni, il minimo nel 1925 con 25 giorni.

Coi valori dell'ultima colonna perequati a tre termini si ottengono totali annui crescenti fino a un massimo nel '28 e poi fino a un secondo massimo più elevato nel '35; con valori minimi nel '24 e nel '30.

Per un esame più minuto, ho diviso il periodo totale 1922-39 in tre periodi di sei anni ciascuno. Riporto quì le medie mensili:

a) per l'intero periodo; *b*), *c*), *d*) rispettivamente per il 1°, il 2° e il 3° periodo di 6 anni; *e*) per il periodo 1914-19 di osservazioni eseguite in Catania [4]).

Tab. II. Medie mensili.

	G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	A.	S.	O	N.	D.	Anno
a)	4,1	3,1	**5,8**	**5,8**	5,4	3,9	1.1	1,5	3,9	2,8	5,1	4,3	46,8
b)	3,3	3,0	**4,5**	3,3	3,5	4,2	1,0	*0,8*	2,2	2,5	3,3	4,0	35,7
c)	4,2	2,7	5,8	5,8	6,0	4,0	1,3	1,8	5,2	3,7	3,0	4,3	50,8
d)	4,7	3,5	7,0	**8,2**	6,8	3,5	*1,0*	1,8	4,5	2,2	6,0	4,7	53,8
e)	4,2	4,0	6,2	4,0	**7,3**	3,2	*0,3*	0,7	1,8	4,8	5,7	3,5	46,0

Da questa tabella delle medie risulta che il massimo numero di giorni con alone si è avuto in marzo e aprile, e per alcuni dei periodi considerati, in maggio; il minimo in luglio e in agosto.

La media annua di giorni con alone è di 46,8 nell'intero periodo, ed è compresa fra 35,7 e 53,8 nei periodi parziali.

Fin quì è stata presa in esame la frequenza degli aloni considerando come giorni con alone quelli in cui è avvenuto almeno uno dei fenomeni alonari, solare o lunare. Esaminiamo ora la frequenza di ciascun tipo di questi fenomeni.

Nella seguente tab. III sono riportati i totali per l'intero periodo 1922-39 e la media annua di ciascuno di questi tipi, secondo l'ordine di frequenza.

Tab. III.	Totali	Medie annue
Alone solare di 22°	712	39,6
Alone lunare	177	9,8
Parelii di 22°	108	6,0
Arco tg. superiore	24	1,3
Paraseleni	5	0,3
Alone solare di 46°	3	0,2
Arco tg. inferiore	3	0,2
Arco circumzenitale	3	0,2

[4]) Vedi nota citata a pag. 222.

Infine è stato osservato una sola volta l'*antelio*, il 18-XI-'36, a ore 17.20, per pochi minuti e una sola volta, il 6-III-'34, la *colonna di Bravais*, prima del sorgere del sole, a ore 06.33, che ebbe anch'essa breve durata, intorno a 5 minuti; il lembo superiore del sole spuntava quel giorno all'orizzonte alle 06.28; all'ora indicata era pertanto ancora coperto dai monti.

Quest'ultima forma secondaria di alone, è effettivamente molto rara. La Dott. Teresa Bonacini [5]) cita per Modena sette casi di colonne luminose tra il 1885 e il 1929. Ne osservai un altro caso, che descrissi dimorando all'Osservatorio etneo (altitudine 2942 metri), il 1°-VII-1918. Questa forma secondaria di alone, alle nostre latitudini, appare così di raro, che il Prof. L. Amaduzzi, avendone osservato un caso (21-V-1916) ritenne di trovarsi davanti a un fenomeno nuovo e ne scrisse un'ampia relazione alla R. Accademia dell'Istituto di Bologna (adunanza del 28 maggio 1916) che la pubblicò con una bella serie di illustrazioni a colori [6]).

Di altre forme alonari molto rare, da me osservate nel periodo in esame, e da ricordare l'alone lunare con paraseleni, apparso il 24-V-1937, a ore 19.45, in uno squarcio di nubi basse, con un accenno di croce lunare, che poi scomparve dopo 14 minuti tra le nubi stesse. Va qui notato che la luna alle 19.45 doveva essere sopra l'orizzonte di appena qualche minuto primo e solo per effetto della rifrazione.

A questo proposito mi sembra opportuno citare qui una relazione presentata alla R. Accademia delle Scienze di Napoli, dall'abate Teodoro Monticelli «*Sulla doppia parasclene osservata dal Signor Egg in Piedimonte d'Alife. il 1° maggio 1817*» [7]).

«Per effetto della Paraselene, egli scrive, triplicata apparve la luna in quella sera con due circoli lucidi, o siano corone, non concentrici, ma uno superiore all'altro, ed invece della coda che ornar sogliono specialmente i Parelii, si ebbero quei pennelli lucidi che la luna e il circolo a lei concentrico adornavano».

Il Monticelli descrive poi i particolari: «la piena luna comparve guernita di quattro raggi, in forma di croce, o per meglio dire di quattro pennelli di raggi bianchi lucidissimi, ciascuno dei quali era della lunghezza di quattro diametri lunari. Compariva in pari tempo intorno alla luna un cerchio di 20° di raggio, il quale esternamente era bianco e perdevasi insensibilmente nell'aria; interiormente era azzurro cupo e perdevasi nell'oscurità delle nuvole che ingombravano il cielo, tra la luna e il

---

[5]) T. Bonacini, *Meteore ottiche registrate all'Osservatorio di Modena nel periodo 1928-1935*. Pubblicazioni del R. Osserv. Geofisico di Modena N° 52. Modena, 1939 XVII.

[6]) L. Amaduzzi, *Un singolare fenomeno di ottica atmosferica*. Rend., vol. XIX. Bologna, 1915.

[7]) T. Monticelli, *Opere* vol. II. Napoli, 1841.

cennato circolo. I quattro pennelli di raggi bianchi, partenti dalla luna, ricomparivano a dritta e a sinistra e nel punto verticale del detto circolo e prolungavasi al di fuori di questo per la lunghezza di 5 diametri dallo apparente disco lunare; il quarto dei pennelli, che apparir doveva nella parte inferiore del circolo occupata da dense nubi, non fu mai visto».

« Seguendo con gli occhi — continua il Monticelli — la linea parallela all'orizzonte che formavasi dai pennelli lucidi della luna e dal circolo a dritta e a sinistra della luna alla distanza di 30° dall'una e dall'altra parte, cioè a oriente e ad occidente, due lune comparvèro ch'eran sì vivaci e lucenti e sì ben rappresentavano quell'astro, che si distinguevano ad occhio nudo financo le principali macchie del disco lunare. Alla parte verticale poi del circolo che cingeva la luna, a 30 gradi ancora dalla medesima sovrastava perpendicolarmente un altro circolo bianco lucido al di fuori dei vaghi colori dell'iride tinta al di dentro, di cui appariva però un piccolo segmento essendo il resto occupato da dense nuvole».

Mi sono indugiato a riportare gran parte di questa antica vivace descrizione del Monticelli di un alone lunare osservato nella Campania nel 1817, per una singolare somiglianza di alcune caratteristiche di esso con quello da me notato in Napoli nel 1937 e con quello osservato nel Mediterraneo romano nel 1932, riportato dal prof. Eredia nel suo pregevole volume « *Nuovi orizzonti della Meteorologia* » [8]).

Un altro fenomeno alonare da me descritto altrove [9]), fu un parantelio con colori spettrali, con azimut di 140° dal sole, osservato in Catania nel periodo precedente (1914-19).

Nella seguente tab. IV è dato il numero di giorni, per ciascun anno dell'intero periodo, in cui si è osservato l'alone solare ordinario, l'alone lunare e i parelii ordinarii, cioè le tre forme più frequenti fra tutte.

---

[8]) F. Eredia, *Nuovi orizzonti della Meteorologia*. Avventure del pensiero, N. 13. Editore Bompiani. Milano 1941, XIX.

[9]) Vedi nota citata a pag. 222.

Tab. IV.

Anno	Alone solare ord.	Alone lunare	Parelii ord.
1922	27	9	1
23	21	7	—
24	25	12	3
25	21	6	1
26	26	9	1
27	51	14	—
28	43	8	4
29	33	10	1
30	40	11	4
31	41	5	7
32	46	9	3
33	49	20	5
34	57	16	5
35	60	11	15
36	48	16	12
37	34	4	7
38	28	3	11
39	40	7	8
Totali	712	177	108
Medie annue	39,6	9,8	6,0

Descrivo adesso particolarmente i tre complessi alonari osservati durante il periodo in esame, che rappresentano per Napoli fenomeni eccezionali.

Nel complesso del 27-IV-'28 cominciò a vedersi, a ore 14.20, l'alone ordinario con l'arco tangente al punto più alto, i due rami del quale si andavano man mano estendendo; a ore 15.18 apparve l'arco tangente inferiore, le cui estremità si congiunsero infine con quelle dell'arco tangente superiore. I due parelii, dapprima separati dall'alone, avevano le code alquanto inclinate verso l'alto così estese da intersecare gli archi tangenti. Più tardi, a cominciare da ore 15.50, apparvero gli archi tangenti infralaterali dall'alone straordinario, (il quale alone di 46° non fu mai visibile) con colori molto vivi; i due parelii, a ore 16.15, adesso con le code orizzontali e non più separati dall'alone, durarono fino al tramonto apparente del sole dietro le colline a W del lago di Averno, dove mi trovavo [10]).

[10]) G. Platania, *Gli aloni osservati in Napoli nel 1928*. Boll. Soc. Nateralisti. XLIII, Napoli, 1930.

Nel complesso dell' 11-IX-'31, apparve a ore 07.05 l'arco circumzenitale con colori molto vivi; l'altezza solare era 15°,3 e la distanza angolare dell' arco dal sole circa 47°; persistette fino a ore 07.50 — una durata eccezionale di 35 minuti — mentre il sole era alto 23°,6.

Apparvero pure, prima di quest' ora, i due parelii e l' arco tangente superiore dell' alone ordinario. Questo riapparve a ore 09.05 con la concavità rivolta al sole, così da formare, a ore 09.15 la parte superiore del così detto alone circoscritto. Da queste osservazioni si poteva concludere che in quelle ore predominavano, in aria calma, cristalli di ghiaccio tabulari, o soli o associati con prismi allungati, i quali ultimi produssero più tardi l' alone circoscritto.

Il complesso alonare del 10-III-'33 cominciò con la comparsa dei parelii ordinarii con la coda, a ore 16.20. Mezz' ora più tardi si vide l' alone straordinario, con colori molto vivi compreso l' azzurro, e insieme l' arco circumzenitale, anch' esso con colori vivacissimi; anche l' arco tangente superiore dell' alone ordinario e i due parelii avevano colori vivaci.

I fenomeni alonari sono poco studiati presso di noi. L' Osservatorio Geofisico della R. Università di Modena è l'unico in Italia nel quale si rivolge particolare attenzione alle meteore ottiche. Fecero studi di ottica meteorologica il Ragona, il Riccò, particolarmente il Bonacini. Questi in una sua interessante pubblicazione sopra siffatti fenomeni [11]), espone una sua teoria sulle nubi iridate e dà istruzioni sul modo di osservare queste e gli aloni.

Teresa Bonacini, come ho detto, ha pubblicato di recente una memoria sulle Meteore ottiche registrate all' Osservatorio di Modena (1828-1935) [12]), nella quale essa tratta anche degli aloni, che dapprima erano osservati saltuariamente, poi, dal 1906, con maggiore diligenza.

Ma in questa serie di 18 anni e nella precedente, di Catania, sono raccolte osservazioni eseguite con particolare diligenza, e continuate eventualmente anche durante la notte.

L' osservazione di questi fenomeni può riuscire molto importante: vi è una classe di aloni — scrive il Besson — estremamente rari, che sono stati osservati una o due volte, e che rimangono affatto enigmatici. Inoltre le misure accurate di certe forme alonari, per esempio degli archi infralaterali dell' alone di 46°, possono gettar luce su teorie ancora controverse.

Ho notato, in un' altra occasione, che i capitani marittimi, abituati come sono alle misure di precisione, si trovano nelle migliori condizioni per tali osservazioni: hanno sottomano gli strumenti per la misura delle

---

[11]) C. Bonacini, *Sopra alcune meteore ottiche osservate in Modena*. Atti Soc. dei Naturalisti e Matematici, Modena, 1922,

[12]) Vedi nota citata a pag. 229.

distanze angolari; la guardia a bordo è ininterrotta di giorno e di notte e la visione della volta celeste è sempre libera in tutte le direzioni. Nelle riviste straniere che riportano le osservazioni meteorologiche di naviganti si leggono descrizione di forme e di complessi alonari talvolta molto interessanti.

Questo nostro studio di osservazioni alonari eseguite in Napoli per 18 anni serve anche a dimostrare che queste meteore ottiche non sono quì così rare come taluni possono credere, e che oltre alle forme più comuni, si osservano anche qui le forme rare.

Le serie di potenze nelle sedici algebre complesse del 4° ordine dotate di modulo.

Memoria di **Anna Rocco Boselli**

(presentata nell'adunanza del dì 3 gennaio 1942 - XX
per essere inserita nel vol. II, serie 3ª, degli Atti

Sunto. — L'A. determina la forma che assumono le serie di potenze nelle varie algebre, complesse, del 4.° ordine, dotate di modulo, e, in particolare per le algebre non commutative, determina quali sono le serie *speciali*, cioè le serie che nel loro campo circolare di convergenza determinano (in analogia alle serie di variabile complessa) una funzione totalmente derivabile, secondo Spampinato, a destra o a sinistra.

Equazioni algebriche nei corpi numerici.

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 gennaio 1942 - XX)

Sunto. — Si prendono in esame i corpi algebrici collegati ad un corpo numerico formato dai resti rispetto ad un modulo primo. Si mostra come le soluzioni si possono sempre ottenere mediante risoluzione di equazioni quadratiche (e quindi escluso il caso di 2), per estrazione di radici quadrate. Si esamina una particolare successione di ampliamento atta a definire il corpo algebrico totale connesso a quello numerico inizirle.

1. Nel corpo numerico $C(p)$ costituito dalle classi di numeri interi fra loro congrui rispetto al modulo primo p, avvengono due fatti degni di rilievo e che permettono di ampliare successivamente il $C(p)$ in corpi algebrici sempre più vasti (ognuno sottocorpo del successivo) mediante la sola aggiunta di radicali quadratici — o per maggior precisione — di equazioni quadratiche.

I fatti da rilevare sono i seguenti:

I) Le radici p-esime di un numero di $C(p)$ sono tutte coincidenti fra loro.

II) L'equazione di grado p, non può trasformarsi nel $C(p)$ ad essere mancante del termine di grado $p-1$ (e più generalmente di qualsiasi altro, salvo l'ultimo).

I due fatti riposano sulla identità:

$$n^p = n,$$

per n qualunque di $C(p)$, oppure sull'altra equivalente

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Ne viene di conseguenza, ad esempio, che nel $C(2)$ le equazioni quadratiche non possono *mai* trasformarsi in un'equazione pura, cioè essere risolubili con una estrazione di radice quadrata. Così nel $C(3)$ le equazioni cubiche non si riducono alla abituale forma canonica, e che per esse non vale il tipo di soluzione dato con la formula cardanica o col metodo di Lagrange; e così via.

Inoltre l'ampliamento avviene uno schema ben definito. In un $C(\mu)$,

salvo lo 0, ogni numero ha precisamente r radici r-sime distinte per $r \neq p-1$; per $r = p-1$ è la sola unità che ammette $r-1$ radici r-sime (le radici possono coincidere per r divisore di $p-1$).

Gli altri numeri *non* hanno radice $(p-1)$-esima nel $C(p)$.

Da p in poi le cose si rinnovano; e quindi ogni numero ha precisamente come radice p-esime se stesso.

Noi ammetteremo che gli ampliamenti successivi siano caratterizzati dall'assegnare ad ogni numero tante radici quanto è l'indice. E più generalmente che debba valere il teorema fondamentale dell'Algebra.

Con maggiore precisione: in $C(p)$ *non* vale tale teorema per le equazioni con coefficienti di $C(p)$; lo ampliamo servendoci delle equazioni quadratiche, ad esempio; sia esso $C'(p)$.

A lor volta per le equazioni con coefficienti di $C'(p)$ non vale in generale tale teorema; quindi lo ampliamo in $C''(p)$. E così via. Vi è un corpo $C^*(p)$ che comprende tutte queste possibili estensioni.

2. Il fatto concreto cui si giunge attraverso il procedimento che qui svilupperemo è che il $C(p)$ si può ampliare in un corpo algebrico $C'(p)$; di p^2 numeri; a sua volta questo si amplia in uno di p^4 numeri, $C''(p)$; questo in uno $C'''(p)$.... e così via: ad ognuno di essi vi è da aggiungere lo 0.

Questi ampliamenti sono poi caratterizzati dalla importantissima proprietà che: tutti i numeri di $C(p)$ si presentano come potenze successive di uno di essi (radice primitiva); quelli di $C'(p)$ ancora come potenze successive di uno di essi; e così via.

Sicchè in un qualunque stadio si ha semplicemente

$$C^{(r)}(q) \equiv 0; 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^\nu; \qquad \nu = p^{r+1} - 1$$

e quindi si ha un corpo ciclico.

D'altro canto la totalità di tutti i $C(p), C'(p), C''(p), \ldots$, forma un corpo infinito $C^*(p)$ che *non* possiede un sottocorpo isomorfo a quello dei razionali [1].

Vedremo in altra sede il perchè di questa eccezione che si ripete in molte altre questioni.

3. Per seguire rapidamente lo sviluppo della teoria, cominciamo ad esaminare quello che avviene nel $C(2)$.

Partiamo dalle equazioni di secondo grado nel $C(2)$ e consideriamo le equazioni proprie, quelle che presentano cioè effettivamente il termine di secondo grado.

---

[1]) Cfr. Scorza, *Corpi Numerici ed Algebre*. Principato, Messina, (32). Il teorema è a pag.

Esse sono in numero di quattro (perchè dei tre coefficienti, il primo è per ipotesi l'unità, e gli altri due possono assumere solo i valori 0, 1) e precisamente:

$$x^2 = 0 \quad ; \quad x^2 + x = 0 \quad ; \quad x^2 + 1 = 0 \quad ; \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

Le equazioni di secondo grado in questo corpo e nei suoi « ampliamenti » a tipo complesso *non* sono riducibili ad estrazione di radice quadrata.

In effetti, posto:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

la trasformazione tipica $x = y + k$ conduce ad $x^2 = y^2 + k^2$, dovendasi porre nullo il termine in yk, perchè munito del coefficiente 2 che equivale a 0.

Dunque, con nessuna trasformazione lineare si può far sparire il termine lineare se c'è; o farlo comparire se non c'è.

D'altro canto l'estrazione di radice quadrata che porterebbe a valori opposti, conduce nel $C(2)$ a valori eguali; sicchè la equazione $x^2+bx+c=0$, a radici distinte, non può mai trasformarsi in una $y^2+d=0$ a radici eguali.

Delle 4 equazioni, le prime tre hanno rispettivamente 0, come radice doppia; 1 come radice doppia; 0, 1 come radici. La quarta *non* ha radici in $C(2)$.

4. Introduciamo convenzionalmente le due radici « imaginarie » ampliamento di $C(2)$, ε, η.

Sarà

$$x^2 + x + 1 = 0 = (x + \varepsilon)(x + \eta);$$

e moltiplicando per $x + 1$

$$x^3 + 1 = 0;$$

sicchè ε ed η si presentano come radici cubiche dell'unità.

D'altra parte l'equazione data, si muta in sè stessa per il mutamento di x in $x+1$; pertanto dovranno essere $1+\varepsilon, 1+\eta$ in altro, o nello stesso ordine, eguali ad ε, η.

Nello stesso ordine ciò è impossibile; perchè sarebbe $1+\varepsilon=\varepsilon$, $1+\eta=\eta$; e quindi ε, η eguali a zero. Resta dunque $1+\varepsilon=\eta$; $1+\eta=\varepsilon$; $\varepsilon+\eta=1$.

Inoltre $\varepsilon\eta = 1$. D'altra parte, mutando x in $\frac{1}{x}$ e liberando da fratti, la equazione resta invariata; dunque sarà (con ragionamento analogo)

$$\frac{1}{\varepsilon} = \eta \quad ; \quad \frac{1}{\eta} = \varepsilon.$$

Infine formata l'equazione in ε^2, η^2, sarà $(x+\varepsilon^2)(x+\eta^2) = x^2 + (\varepsilon^2+\eta^2)x + \varepsilon^2\eta^2$.

Ma $\varepsilon^2+\eta^2 = (\varepsilon+\eta)^2$; $\varepsilon^2\eta^2 = (\varepsilon\eta)^2$; e siccome $\varepsilon+\eta = \varepsilon\eta = 1$, l'equazione resta immutata.

Dunque devono essere in altro ordine anche ε^2, η^2 coincidenti con ε, η: ed escluso $\varepsilon^2=\varepsilon$ $\eta^2=\eta$ che porterebbero ε, η eguali 1 o 0, resta $\varepsilon^2=\eta$. $\eta^2=\varepsilon$, il che conferma $\varepsilon^3 = \eta^3 = 1$; $\varepsilon\eta = 1$.

Pertanto il $C(2)$ resta ampliato in

$$C'(2) \equiv 0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2.$$

5. In questo corpo le equazioni quadratiche proprie, possibili, sono 16; quattro di queste già considerate nel $C(2)$ e dodici nuove; cioè

$x^2+\varepsilon = 0$	$x^2+x+\varepsilon = 0$	$x^2+\varepsilon x+\varepsilon = 0$
$x^2+\varepsilon^2 = 0$	$x^2+x+\varepsilon^2 = 0$	$x^2+\varepsilon^2 x+\varepsilon^2 = 0$
$x^2+\varepsilon x = 0$	$x^2+\varepsilon x+1 = 0$	$x^2+\varepsilon x+\varepsilon^2 = 0$
$x^2+\varepsilon^2 x = 0$	$x^2+\varepsilon^2 x+1 = 0$	$x^2+\varepsilon^2 x+\varepsilon = 0.$

Si vede subito che le quattro della prima colonna sono risolubili in $C'(2)$ con radici: ε^2 doppia; ε doppia; $0, \varepsilon$; $0, \varepsilon^2$.

Similmente le ultime due della terza colonna lo sono, con radici $1, \varepsilon^2$; $1, \varepsilon$. Le altre sei invece sono tutte collegate fra loro e trasformabili l'una nell'altra in vari modi.

Infatti mutando x in $x+1$, la prima e la seconda si scambiano fra loro; la terza si scambia con la quinta, la quarta con la sesta.

Se si muta x in εx oppure in $\varepsilon^2 x$, analoga permutazione avrà luogo; e lo stesso se si muta x in $\frac{1}{x}$.

D'altro canto, se si effettua il prodotto dei primi membri di esse, fra loro si trova

$$x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0;$$

che moltiplicato per x^3+1, conduce a $x^{15}+1=0$.

In altri termini *tutte* le radici di quelle equazioni quadratiche sono radici quindicesime dell'unità: esse ampliano il $C'(2)$ ulteriarmente in $C''(2)$.

Si osserva che formando come prima le equazioni ai quadrati delle radici, tali equazioni sono le stesse di quelle di partenza permutate ancora fra loro.

Tenuto presente tutto ciò, si scorge che ad esempio, la prima equazione ha le radici λ e λ^4; che $\lambda^5 = \varepsilon$ e così via.

D'altro canto, con la trasformazione additiva si trova che le radici di

tutte quelle equazioni sono sempre e solo contenute nella tabella

$$\begin{array}{l} 1\ ,\ \lambda\ ,\ \lambda+1\ ,\ \lambda+\varepsilon\ ,\ \lambda+\varepsilon^2; \\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\lambda\ ,\ \varepsilon\lambda+1\ ,\ \varepsilon\lambda+\varepsilon\ ,\ \varepsilon\lambda+\varepsilon^2; \\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^2\lambda\ ,\ \varepsilon^2\lambda+1\ ,\ \varepsilon^2\lambda+\varepsilon\ ,\ \varepsilon^2\lambda+\varepsilon^2. \end{array}$$

e questo, salvo l'ordine coincidono con

$$1\ ,\lambda\ ,\lambda^2\ ,\ldots\ ,\lambda^{15}.$$

Quindi:

Ogni polinomio in λ, a coefficienti di $C'(2)$ si riduce sempre alla forma $\mu\lambda+\nu$ cui μ e ν sono in $C'(2)$; e quindi successivamente ad una sola potenza di λ.

Pertanto il secondo ampliamento di $C(2)$ in $C''(2)$ consta semplicemente di $16=4^2$ elementi

$$C''(2)\equiv 0\ ,1\ ,\lambda\ ,\ldots\ ,\lambda^{14}\ ;\lambda^{15}=1.$$

6. Il procedimento si può iterare indefinitamente. Infatti, in $C'(2)$ si possono formare 16^2 equazioni quadratiche di cui 4^2 già considerate; e pertanto 16^2-4^2 nuove.

L'equazione base sarà

$$x^2+x+\lambda=0.$$

Fatto il prodotto di tutti i primi membri (esclusa la $x^2=0$) si trova precisamente

$$x^{255}+1=0.$$

In altri termini gli ampliamenti successivi del $C(2)$, dovuti alle equazioni quadratiche, avvengono secondo le radici dell'unità di ordine

$$\left\{\begin{array}{l} 3=2^2-1=(2\ -1)\,(2+1)=1\cdot 3 \\ 15=2^4-1=(2^2-1)(2^2+1)=1\cdot 3\cdot 5 \\ 255=2^8-1=(2^4-1)(2^4+1)=1\cdot 3\cdot 5\cdot 17 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

In ogni corpo $C^{(n)}$ raggiunto, che è dato dalle radici di ordine $2^\nu-1$, $\nu=2^n$, la somma di due qualunque di queste è ancora una radice dello stesso ordine.

7. Trattiamo adesso dell'ampliamento generale algebrico del corpo stesso.

Partiamo da $C(2)$: supponiamo di scrivere un certo numero di equazioni

algebriche qualunque; di ampliare il $C(2)$ con l'aggiunta di radici di queste e considerare nuove equazioni; e così via con un numero finito di passi.

Ovviamente basta — a ciò fare — considerare una sola equazione algebrica di grado sufficientemente elevata con coefficienti di $C(2)$:

$$\sum_0^n a_r x^r = 0 \qquad a_r = 0, 1 \qquad a_n = 1.$$

Ora è facile vedere che — per quanto si è premesso — sè $\alpha_1 \dots \alpha_n$ sono le radici,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = a_1 \\ &\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \quad = a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

sarà anche

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 \dots)^2 = a_1^2 = a_1 \\ \alpha_1^2\alpha_2^2 + \dots \quad = (\alpha_1\alpha_2 + \dots)^2 = a_2^2 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

per essere le a_r o 0 oppure 1.

Dunque, *in altro ordine i quadrati delle radici di una qualsiasi* equazione algebrica in $C(2)$ coincidono con le radici stesse,

$$\alpha^2 = \beta \quad ; \quad \beta^2 = \gamma ; \dots \mu^2 = \alpha.$$

Ciò implica che *le radici* di una qualsiasi equazione algebrica *in* $C(2)$ *sono sempre* radici ν–esime dell'unità; e precisamente

$$\nu = 2^k - 1,$$

e quindi coincidono con quelli già detti.

Dunque possiamo concludere:

Tutti i possibili successivi ampliamenti di $C(2)$, consistono nelle aggiunzioni già indicate con

$$C(2) \ , \ C'(2) \ , \ C''(2) \dots$$

Ogni equazione algebrica con numeri appartenenti a $C^{(n)}$ o è risolubile in $C^{(n)}$ o nel successivo.

Il corpo *completo* aderente a $C(2)$ è precisamente

$$C^*(2)$$

formato con tale progressione illimitata.

In esso *sono* risolubili tutte le equazioni algebriche con suoi coefficienti.

8. Passiamo ora ad un $C(p)$ qualunque. Le equazioni di secondo grado, proprie,

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

si riducono, dividendo per a, alle

$$x^2 + bx + m = 0.$$

Esse sono pertanto in numero di p^2. D'altro canto i prodotti

$$(x - \alpha)(x - \beta)$$

con α e β numeri di p, sono in numero di $p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$; e pertanto vi sono $\frac{p(p-1)}{2}$ equazioni i cui primi membri *non* sono decomponibili in fattori reali.

Introduciamo « quantità complesse » come radici di una di queste equazioni — ed ampliamo pertanto il $C(p)$ in un $C'(p)$ con l'aggiunta di queste quantità. Conveniamo che l'ampliamento avvenga in modo da conservare le abituali proprietà.

Osserviamo poi che effettuando con coefficienti di $C(p)$ una trasformazione a radice aumentata, a radice multipla, a radice reciproca, una qualunque di queste equazioni si deve mutare necessariamente in una della stessa classe; quindi l'ampliamento è tale che un qualsiasi elemento di $C(p)$ coordinato con operazione razionale con uno di $C'(p)$, nuovo, ne dà ancora uno nuovo.

D'altro canto, scritta l'equazione

$$x^2 + lx + m = 0$$

se ε, η sono le sue radici, risulterà

$$(\varepsilon + \eta)^p = \varepsilon^p + \eta^p$$
$$(\varepsilon\eta)^p \quad = \varepsilon^p \cdot \eta^p.$$

Quindi l'equazione:

$$x^2 + lx + m = 0 \qquad (\varepsilon + \eta = l\,;\, \varepsilon\eta = m)$$

è tale che l'equazione alle potenze p-esime delle redici coincide con essa stessa, essendo $l^p = l$, $m^p = m$.

Dunque saranno possibili due alternative

$$\varepsilon^p = \varepsilon \;;\; \eta^p = \eta$$

oppure

$$\varepsilon^p = \eta \ ; \ \eta^p = \varepsilon$$

La prima alternativa conduce a $\varepsilon^{p-1} = \eta^{p-1} = 1,0$; la seconda invece ad $\varepsilon^{q-1} = \eta^{q-1} = 1$, $q = p^2$.

La prima alternativa è verificata per tutti i numeri di $C(p)$; la seconda per i nuovi numeri che l'ampliano in $C'(p)$.

9. Lo schema di struttura degli ampliamenti successivi, è adesso chiaro. I numeri di $C'(p)$ sono in numero $p^2 - 1$, escluso lo zero; con lo zero risulteranno in numero di $p^2 = p_1$.

Formiamo tutte le equazioni quadratiche a coefficienti di $C'(p)$; saranno in numero di p_1^2; mentre i primi membri (col primo coefficiente unitario) decomponibili in fattori lineari di di $C'(p)$ sono in numero di $\frac{p_1(p_1-1)}{2}$.

Dunque consideriamo un'equazione:

$$x^2 + lx + m = 0$$

con l ed m di $C'(p)$; e formiamo quella che ha per radici le potenze p_1 esime delle sue: supposte che sieno ρ, σ. Siccome per i numeri di $C'(p)$ risulta

$$\rho^{p_1} = \rho \quad ; \quad \sigma^{p_1} = \sigma$$

sarà ancora

$$x^2 + lx + m = 0$$

l'equazione a radici-potenze di quelle date, se ρ, σ sono in C'. Se non vi sono, occorre osservare che, l ed m sono in C', e che:

$$\begin{cases} -l = \rho + \sigma \\ m = \rho\sigma \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (-l)^{p_1} = -l &= (\rho + \sigma)^{p_1} \\ m^{p_1} = m &= (\rho\sigma)^{p_1} . \end{aligned}$$

Ma

$$(\rho + \sigma)^{p_1} = \rho^{p_1} + \binom{p_1}{1}\rho^{p_1-1}\sigma + \dots$$

nella quale tutti i coefficienti sono multipli di p e quindi nulli in $C(p)$; dunque

$$(\rho + \sigma)^{p_1} = \rho^{p_1} + \sigma^{p_1} .$$

Pertanto anche se l'equazione non ammette radici in $C'(p)$ sarà tuttavia coincidente con quella avente come radici le potenze p_1-esima delle radici stesse.

Dunque, non potendo essere

$$\rho^{p_1} = \rho \quad ; \quad \sigma^{p_1} = \sigma$$

dovrà essere

$$\rho^{p_1} = \sigma \quad ; \quad \sigma^{p_1} = \rho$$

che conducono a

$$\rho^{p_2} = \rho \quad ; \quad \sigma^{p_2} = \sigma$$

e quindi a

$$\rho^{p_2-1} = \sigma^{p_2-1} = 1,$$

ove si è posto $p_1^2 = p_2 = p^4$. In tal modo si è ampliato il $C'(p)$ in un $C''(p)$.

10. La catena di ampliamenti prosegue con lo stesso procedimento. Intanto risulta che da

$$\varepsilon^{p^2-1} = 1 \quad ; \quad \eta^{p^2-1} = 0$$

segue

$$\varepsilon^{(p+1)(p-1)} = 1 \quad ; \quad \eta^{(p+1)(p-1)} = 1$$

e siccome un qualunque numero di $C(p)$ — salvo lo zero — soddisfa alla

$$r^{p-1} = 1$$

resta, per le condizioni da soddisfare, che gli elementi di $C'(p)$ non compreso in $C(p)$ daranno:

$$\varepsilon^{p+1} = r \quad ; \quad \eta^{p+1} = r.$$

In modo analogo quelli di $C''(p)$ non compresi in $C'(p)$ dànno:

$$\rho^{p_1+1} = \varepsilon$$

cioè ρ è radice d'indice $p_1 + 1 = p^2 + 1$ di numeri di $C'(p)$.

In definitiva gli ampliamenti successivi si ottengono a partire da $C'(p)$, mediante equazioni quadratiche che sono *tutte* risolubili per estrazione di un radicale che diventa di ordine successivamente

$$p + 1 \quad ; \quad p^2 + 1 \quad ; \quad p^4 + 1 \, ; \ldots$$

in conformità di quello che avveniva nel $C(2)$.

11. D'altro canto, noi dobbiamo dimostrare che questi ampliamenti conducono effettivamente ad un corpo numerico.

Orbene, scritte le equazioni quadratiche a coefficienti di $C(p)$, trasformiamole o a radici aumentate, o a radici multiple (con costante additiva o moltiplicativa di $C(p)$ stesso) o a radici reciproche. Si otterranno ovviamente equazioni della stessa classe.

Dunque la somma di un numero $C(p)$ e di un numero di $C'(p)$, o il prodotto, dànno un numero di $C'(p)$; il reciproco di uno di questi è ancora in $C'(p)$; ed in generale sono in $C'(p)$ le espressioni lineari fratte ottenute da un numero di $C'(p)$ con trasformazione omografica.

Per lo stesso motivo si vede che tutte le potenze di tali numeri appartengono ancora a $C'(p)$.

Fissiamone dunque uno e sia esso ε; le combinazioni lineari di ε a coefficienti in $C'(p)$ sono

$$r\varepsilon + s$$

in numero di $p(p-1)$, tutte diverse fra loro.

Infatti r non può essere nullo, s lo può essere; quelle combinazioni sono tutte diverse, perchè se non lo fossero risulterebbe

$$r\varepsilon + s = r'\varepsilon + s'$$

e quindi ε risulterebbe già in $C(p)$.

Pertanto i p numeri di $C(p)$ ed i $p.(p-1)$ numeri ora indicati dànno tutti i possibili numeri di $C'(p)$.

Ovvero:

I numeri di $C'(p)$ si possono ottenere o come espressioni lineari di uno di essi, con coefficienti in $C(p)$ – oppure (come si vedrebbe direttamente) come potenze di uno di essi.

Dunque, anche la somma, il prodotto etc. di numeri di $C'(p)$ apparteneva a $C'(p)$.

E questo forma effettivamente corpo.

In modo del tutto analogo si mostrerebbe che tutte le combinazioni

$$\varepsilon\rho + \eta$$

con ρ numero di $C''(p)$, ε, η di $C'(p)$, sono in $C''(p)$; e che quindi anche $C''(p)$ forma corpo; e così via per i successivi ampliamenti.

12. Se si avesse non più un'equazione quadratica ma un'equazione di grado qualunque, il procedimento non varierebbe.

Ogni equazione di grado qualunque (non multiplo di p) in un $C^{(n)}(p)$, ammette sempre radici che sono simultaneamente radici ν-esime dell'unità, per ν sufficientemente elevato.

Dunque, nei $C(p)$ valgono i seguenti teoremi:

Le equazioni algebriche di grado qualunque in un qualsiasi ampliamento di $C(p)$ si risolvono sempre mediante equazioni quadratiche negli stessi ampliamenti; queste conducono ad un ulteriore ampliamento.

Inoltre [1]) ogni equazione algebrica è sempre un fattore di un'equazione binomia di grado sufficientemente elevato.

Resta così definito il corpo $C^*(p)$ contenente tutti gli ampliamenti:

$$C(p) \; ; \; C'(p) \; , \; C''(p), \ldots;$$

esso è tale che in ogni stadio un'equazione quadratica non risolubile in $C^{(\nu)}(p)$ permette di passare allo stadio successivo $C^{(\nu+1)}(p)$.

Per questo corpo $C^*(p)$ non vale la proprietà enunciata di avere un sottocorpo infinito isomorfo a quello dei numeri razionali — anzi esso non ha sottocorpi infiniti.

---

[1]) Cfr. G. Scorza, loc. cit.

Interpretazione probabilistica di teorie logiche e matematiche relative a fenomeni concreti

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Sunto. — L'A. imposta il problema del « valore » della logica, ed in genere dei ragionamenti scientifici, nella costruzione e nell'applicazione di una qualsiasi teoria.

1. Una questione base perchè si possa parlare di teoria matematica di un qualsivoglia fenomeno (fisico, biologico, sociale) è quella che forma l'oggetto della presente nota.

Riteniamo che essa valga a chiarire alcuni nostri punti di vista, variamente esposti, e nel contempo — a porre su una base concreta varie altre teorie che si occupano di logiche non aristoteliche.

La questione base è la seguente:

Sino a qual punto una teoria matematica possa ritenersi valida nella descrizione di un fenomeno concreto; e sino a qual punto debba ritenersi logico il ragionamento usuale su una qualunque quistione.

Premettiamo un'osservazione: La logica e la matematica possono ritenersi come derivanti solo da ragionamenti puri.

Gli oggetti e gli enti da essi definiti, lo sono in modo che non vi sia ambiguità o plurivalenza di significati; meglio ancora, in modo tale che rispetto allo sviluppo della teoria (catene di sillogismi, teoremi discendenti da postulati) intervengono soltanto le caratteristiche originarie di definizione, senza che altre caratteristiche abbiano gioco. Così il concetto di punto e di retta in geometria assiomatica (ad esempio la costruzione euclidea o quella hilbertiana) non sono ulteriormente definite se non attraverso le mutue relazioni, sicchè è possibile scambiare le rette ed i punti, ottenendo il principio ben noto di dualità.

Pertanto, i concetti matematici *devono* ritenersi (per poter parlare di una qualsivoglia teoria matematica) sempre come definiti senza ambiguità nel campo delle operazioni logiche da eseguire; cioè sono a contorni netti, per così dire.

2. Invece, nella prassi di una qualsiasi scienza di applicazione, un qualsiasi concetto sorge *soltanto* come astrazione da una collezione di fatti concreti. Esso è, pertanto, definito solo attraverso una concezione statistica ed è quindi di carattere opposto a quello matematico. Così ad esempio il

concetto « cane » ha un significato che è definito solo nelle sue grandi linee; man mano che si vuol rendere più rigoroso questo concetto, esso si dissolve, attraverso analisi sempre più complicate di casi singoli.

Così anche il concetto di « grigio »; la sua definizione presuppone: I) individui di cui già sia controllata la normalità — II) che le condizioni di analisi siano le stesse — III) che le condizioni ambientali siano le stesse.

Per poco che uno dei due individui sia daltonico o che siano esaminati colori diversi sotto luci diverse, si è portati a definire come grigio due cose tutt' affatto distinte.

Ed allora sorge spontanea l'osservazione fondamentale: *Le definizioni di fenomeni concreti hanno soltanto valore probabilistico (o statistico).*

Quindi il confronto ed il ragionamento logico su un ipotetico colore bianco o grigio hanno soltanto un valore relativo alle condizioni di esame, all' ambiente, agli sperimentatori.

Sorge cioè l' inscindibilità del trinomio:

OGGETTO — SOGGETTO — AMBIENTE

ed il conseguente valore probabilistico di ogni ragionamento.

Invece nel ragionamento puramente logico si presuppone l'invarianza dell'oggetto e la sua indipendenza dal soggetto e dall' ambiente.

Vedremo le conseguenze di tale fatto e di tale diversità.

3. Un secondo punto della stessa quistione è quello relativo ai concetti di eguaglianza, equivalenza etc.

In logica ed in matematica, tali concetti hanno anch' essi una definizione « puntiforme », per così dire, che non dà luogo ad ambiguità. Valgono per essi le ben note proprietà: riflessiva, transitiva e simmetrica.

Nei fenomeni concreti è meglio sostituire ad essi il concetto di *indiscernibilità.*

Due oggetti, due fenomeni sono indiscernibili — riguardati sotto un certo particolare aspetto — oppur no.

Orbene, mentre in matematica o in logica formale attraverso una catena illimitata comunque grande (ma finita) di eguaglianze

$$A = B\ ;\ B = C\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ L = M$$

si arriva *sempre* ad una eguaglianza fra i termini estremi, in una qualsiasi teoria di fatti concreti, questa legge ha anch' essa solo un valore probabilistico e non più assoluto.

In altre parole vi sono catene di indiscernibilità che conducono ad una

discernibilità finale fra gli estremi; cioè vale consecutivamente: $A \sim B$; $B \sim C$; ... $L \sim M$, contrapposto a $A \neq M$.

Ed in effetti si passa da un colore ad un altro per gradazioni insensibili. (Benvero anche in matematica — specie nel calcolo delle probabilità — si incontrano fatti analoghi).

4. Come conseguenza di questo ultimo fatto nasce il concetto di *variabile casuale* e di *sfioccamento statistico*. Per il primo supponiamo, per semplicità, che si tratti di fenomeni cui si attribuisca una misura, un numero, atto a caratterizzarli.

Un osservatore A ha misurato il valore α per un certo fenomeno — o meglio ritiene di assegnare il valore α (matematico) alla modalità di quel certo fenomeno.

Un altro osservatore B misura per lo stesso fedomeno il valore β; un terzo osservatore C misura il valore γ .....

Ora α, β γ ..... sono tutte variabili *mutuamente* casuali; non essendo escluso che l'osservatore B, quello C ..... possono essere anche lo stesso osservatore in un altro momento o con altri mezzi di osservazione o in altre condizioni.

In altri termini *non* esiste un concetto di variabile casuale a sè stante, sibbene un concetto di *variabili mutuamente casuali*.

Dove noi possiamo o vogliamo ritenere che il valore α sia quello « vero », gli altri danno le misure causali a quelle collegate, ciascuna con una certa eventuale frequenza.

Naturalmente è lecito ad un altro sperimentatore ritenere che β sia il valoro « vero » ed aliora cambia la distribuzione delle frequenzè e degli altri valori.

Ma precisamente da quest'ultimo fatto, nasce il concetto di « *sfioccamento statistico* ».

Noi abbiamo — come definizione matematica — che è possibile trattare di probabilità, di eventi egualmente probabili etc.

Cioè noi sappiamo — ad esempio — che fra pila e croce il concetto matematico assegna ad ognuno dei due fatti le probabilità 1/2.

Eseguiamo una serie di prove. Avremo una frequenza di pila data da $f_p = \frac{p}{n}$; e di croce data da $f_c = \frac{c}{n}$, essendo p e c il numero di pila ed il numero di croce su n prove. (Di straforo osserviamo che *non* è conveniente parlare di n che cresce oltre ogni limite, cioè di infinite prove; resterebbero tutti gli inconvenienti che adesso rileveremo aggravati dal fatto che — in tal caso — le frequenze non formano più i numeri reali ma un altro insieme di altro tipo e di altra natura, come mostreremo altrove).

Orbenne $f_p + f_c = 1$ ma f_p ed f_c in generale sono diversi da 1/2.

Noi abbiamo *definito* matematicamente le probabilità, e *misuriamo* invece delle frequenze.

Qui ritorna in giuoco il calcolo delle probabilità, ed afferma che *tutte* le serie di n colpi si possono disporre in tabella; ed assegna la probabilità di presenza di ciascuna serie di colpi, in base alle premesse di equiprobabilità di ogni colpo di pila e croce, e di indipendenza delle prove successive.

Quindi ci sarà una probabilità di secondo ordine; questa misura la probabilità che esca quella sequenza che ha dato le frequenze f_p ed f_c; e quindi la probabilità dello scarto

$$\left| f_p - \frac{1}{2} \right| = \left| f_c - \frac{1}{2} \right| .$$

Ma a sua volta noi eseguiremo adesso una serie di serie; m serie di n colpi ciascuna.

Ognuna di queste serie di n colpi avrà uno scarto che non è più quello della prima; quindi ritorna lo stesso problema.

In altri termini vi è questa illimitata alternativa. Si definiscono probabilità; si misurano frequenze; lo scarto, a sua volta, è definito in base ad una probabilità di secondo ordine; ed invece di queste si misurano frequenze di secondo ordine; il nuovo scarto è definito in base a probabilità di terzo ordine e così via illimitatamente.

Questo procedimento è quello che noi chiamiamo *sfioccamento statistico*.

Esso nasce dal fatto che il ragionamento matematico può pensarsi come caso limite del ragionamento concreto; ma che la ricostruzione di questo a partire da quello richiede la costruzione di un sistema analogo a quello ora indicato.

5. Ed eccoci ora al terzo ed ultimo punto. In matematica avendosi una variabile che dipenda da più altre, è lecito ammettere anzitutto che si possa definire la funzione considerata sì da farla rintracciare e riconoscere da qualunque altro studioso; poi si ammette che è possibile studiarla, senza che questo studio la modifichi; ed infine che è possibile isolare una delle variabili: sicchè la funzione venga studiata come funzione di una sola variabile (quella ora prescelta). Opportunamente modificato il procedimento serve anche per i funzionali.

Nel ragionamento scientifico *applicato* le tre cose cadono simultaneamente.

Valgono cioè — in contrapposto con il ragionamento matematico — i seguenti tre principi:

I) *Le definizioni, appunto perchè aventi valore statistico, non sono generalmente comunicabili in modo rigoroso.*

II) *Lo sperimentatore con la sua presenza modifica il fenomeno che vuole studiare.*

III) *Una qualunque variabile non si separa dalle altre.*

Il contrario, cioè

I) Le definizioni sono rigorose e comunicabili.

II) Lo sperimentatore può opportunamente non influire sul fenomeno da misurare.

III) Una qualunque variabile si può separare dalle altre;

ha valore assoluto soltanto in logica o in matematica, ma invece, come ora detto, ha solo un valore probabilistico in qualsiasi ragionamento su fatti concreti.

La prima affermazione sta a significare che la definizione di un qualsiasi concetto non è mai completa; e che le condizioni d'ambiente e dei soggetti possono concorrere a far ritenere discernibili o indiscernibili oggetti che non lo sono.

La seconda affermazione, rinforza quanto precede; e d'altro canto i fisici, i chimici, i biologi sanno che soltanto per pura convenzione si ammette (dopo rigorose cautele) che l'osservatore *non* influisce sul fenomeno: anzi tutte queste scienze sanno benissimo la convenzionalità di ogni affermazione contraria.

La terza è della stessa natura; se ad esempio noi vogliamo in fisica — studiare solo un fenomeno derivante dal calore, dobbiamo tener conto della pressione, della dilatazione, della eventuale termo elettricità; per definire e studiare le quali ci è sua volta necessità di isolare via via altre variabili.

In altre parole è tutto un giro di approssimazioni successive, sempre più deboli, aventi carattere di media e quindi statistico, che ad un certo punto si spezzano assumendo definizioni non complete e quindi non matematiche.

Così ad esempio per definire la pressione barometrica si usa dire « al livello del mare » ed a temperatura « 15° »; ma a sua volta il livello dipende dall'una e dall'altra; queste a loro volta dalla pressione, sicchè è un vero procedimento di approssimazioni successive per funzioni non definite esplicitamente ma implicitamente (e per di più nemmeno definite, in senso matematico).

6. Le conseguenze di tali concezioni sull'applicabilità della logica e della matematica ai fenomeni che ci circondano sono importanti. E ne elenchiamo alcuni:

I) Anzitutto per la logica applicata non ha più valore assoluto il principio del terzo escluso: sono assorbite le ricerche quindi su altri tipi di logica.

Infatti « *a* » ha una definizione probabilistica, « *non a* » una analoga; e

quindi la loro mutua esclusione può ancora e solo avere un valore probabilistico.

II) Man mano che ci si allontana dalle premesse immediate di una teoria, le proposizioni logicamente vere o quelle logicamente false, dedotte da quelle premesse, acquistano sempre minor rilevanza in quanto a conferma o a negazione delle ipotesi base.

In effetti più lunghe sono le catene delle deduzioni logiche fatte, più aumenta lo sfioccamento statistico fra quello che si rileva e quello che la teoria prevede; e ciò a causa della inesatta o incompleta definibilità delle premesse e della non rigorosa validità dei sillogismi di deduzione.

III) Le esperienze « pensate » ma non effettuate hanno *sempre* valore nullo per la conferma di una teoria matematica di certi fenomeni; per converso le esperienze effettuate hanno *solo* valore probabilistico agli effetti di tale conferma o di tale negazione.

IV) Una teoria matematica di un qualsiasi fenomeno concreto è sempre in continua revisione; le conseguenze matematiche non verificate conducono a ritenere o che vi siano errori di osservazione, o che vi siano errori di sperimentazione, oppure infine che fatti, originariamente indiscernibili, non lo sono in una teoria più completa.

V) Una teoria matematica di un fenomeno concreto ha valore — come probabile schema di interpretazione — solo ad una certa scala; ad altra scala o svanisce il fenomeno o si modificano le leggi enunciate [1]).

---

[1]) Cfr: G. Andreoli, *Sulla metalogica di Harbreyer*. Boll. Acc. Gioenia. Catania 1932. — *Le antinomie, loro formazione* etc. S. I. P. S. Roma 1936-37. — *La logica del finito e la logica dell' infinito*. Atti Congresso di filosofia di Napoli. Napoli 1937-38.

Ricerche sulla fitina — Azione della fitasi dell'orzo sul fitinato di sodio

Nota di **Mario Covello**, *presentata dal socio ord.* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942-XX)

Sunto. — Allo scopo di portare un contributo alla conoscenza della costituzione della fitina è presa in esame l'azione della fitasi dell'orzo sul fitinato di sodio naturale in funzione del pH, del tempo, della concentrazione di enzima e di quella del substrato.

Si stabilisce che vi sono due optimum di pH: uno a 6,12, l'altro a 3,88. La scissione del fitinato di sodio avviene in due fasi: a pH 6,12 l'esafosfato si scinde in tetrafosfato, questo è scisso completamente a pH 3,88.

La costituzione della fitina, nonostante i tentativi di sintesi effettuati da Neuberg e Kretschmer [1]), da Anderson [2]), da Contardi [3]), da Carré [4]) e per ultimo da Posternak [5]), che ha portato il più valido contributo alla soluzione del problema, presenta ancora qualche punto controverso ed oscuro.

Generalmente questo composto fosforganico di riserva, diffusissimo nel regno vegetale, viene considerato come il sale di calcio e di magnesio dell'acido inositesafosforico al quale compete la formula: $C_6H_{18}O_{24}P_6$.

Tale costituzione troverebbe conferma:

1) nell'azione sull'acido fitinico naturale degli alcali sotto pressione che provoca la separazione di una molecola di inosite inattiva per sei molecole di acido fosforico, come sostengono Neuberg e Brahms [6]) e Winterstein [7]);

2) nella sintesi realizzata dal Posternak.

In effetti l'acido fitinico naturale ottenuto dalla fitina estratta dai vegetali presenta una costituzione che differisce da quella dell'acido inositesafosforico di sintesi per un contenuto di $3H_2O$ in più, constatazione fatta dallo stesso Posternak. E le tre molecole di acqua si deve escludere che siano

---

[1]) Biochem. Zeit., *36*, 5, 1911.
[2]) Journ. of biol. Chem., *11*, 484, 1912.
[3]) Atti Acc. Lincei, *19*, 23, 1910.
[4]) Bull. Soc. chim., Ser. 4, *9*, 195, 1911.
[5]) Compt. rend., *169*, 188, 1919.
[6]) Biochem. Z., *V*, 443, 1907.
[7]) Z. physiol. Chem., *58*, 118, 1908.

di cristallizzazione giacchè tutti i tentativi fatti per eliminarle hanno costantemente provocato la decomposizione del prodotto.

Basandosi su questa constatazione, STARKENSTEIN [8]) avanzò l'ipotesi che l'acido fitinico non sia un estere dell'inosite con l'acido fosforico bensì un complesso formato da una molecola di quest'ultima con tre molecole di acido pirofosforico. Tale complesso ha una formula bruta ($C_6H_{24}O_{27}P_6$) che si accorda con quella dell'acido fitinico naturale.

Non risulta però che un simile prodotto sia stato sintetizzato e pertanto l'ipotesi formulata dallo STARKENSTEIN non ha avuto una conferma sperimentale.

I prodotti salini fosforganici estratti dai vegetali che vanno sotto il nome di fitina presentano contenuti di fosforo, calcio e magnesio che si allontanano sensibilmente da quelli che competono sia ai sali di calcio e magnesio dell'acido inositesafosforico di sintesi che ai corrispondenti sali dell'acido fitinico naturale. La composizione teorica di questi è la seguente:
Inositesafosfato di calcio e di magnesio: $C_6H_6O_{24}P_6Mg_3Ca_3$:

$$P = 22{,}12\% \quad ; \quad Ca = 14{,}29\% \quad ; \quad Mg = 8{,}67\%.$$

Fitinato di calcio e magnesio: $C_6H_{18}O_{27}P_6Mg_3Ca_3$:

$$P = 20{,}78\% \quad ; \quad Ca = 13{,}42\% \quad ; \quad Mg = 8{,}14\%.$$

Le analisi eseguite da vari sperimentatori e particolarmente da MAROTTA [9]) su prodotti estratti dai materiali più vari, quali: pula di riso, mais, orzo, avena, panello di arachide, di avena, di cocco, farina di estrazione di soia, di girasole, di colza, ecc. ecc., dimostrano che la composizione dei prodotti ottenuti è, in genere, diversa a seconda del materiale da cui si parte. Talvolta però tali differenze di composizione si notano pure tra prodotti ottenuti dallo stesso materiale, ad esempio dalla pula di riso, come risulta da una tabella riportata nel lavoro del citato A. Tale incostanza di composizione dipende prevalentemente dai metodi di estrazione adoperati, consistenti, in linea di massima nell'uso di soluzioni acide per acido cloridrico di appropriata concentrazione e successiva precipitazione per neutralizzazione delle soluzioni stesse con una base (NH_3, NaOH, MgO, ecc.). La prova di ciò viene data dalla riscontrata variazione del contenuto di fosforo dei prodotti ottenuti in dipendenza della durata di contatto fra liquidi acidi di estrazione e materia prima impiegata. Di modo che si deve ritenere che i prodotti estratti con simile tecnica, allo stato attuale non sostituibile da altra più idonea, non corrispondano alla composizione del prodotto fosfor-

---

[8]) Biochem. Z., *30*, 56, 1911.

[9]) Ann. chim. appl., *22*, 763, 1932.

ganico di riserva che la pianta elabora. Questo è intimamente collegato al metabolismo del fosforo nei vegetali e si ammette [10]) che si formi nelle foglie della pianta sotto l'azione della clorofilla e dei raggi solari e che successivamente vada ad accumularsi negli organi di riserva, semi, rizomi, tuberi, bulbi, cioè in tutti quegli organi in cui viene immagazzinato il materiale di riserva destinato alla nutrizione dell'embrione vegetale. Nel corso della germinazione l'acido fitinico contenuto nel seme si scinde lentamente sotto l'azione dell'enzima fitasi per fornire all'embrione l'acido fosforico necessario alla formazione delle lecitine e delle nucleine [11]).

Da quanto fin qui esposto risulta che la fitina, a parte l'interesse che presenta come medicamento fosforato, una ben più importante funzione esercita nel metabolismo del fosforo nei vegetali e che per portare un contributo efficace ad una migliore e più approfondita conoscenza della questione è necessario indagare prevalentemente sulle possibilità di scissione e di degradazione dell'acido fitinico in presenza dell'enzima fitasi e sulle cause che influenzano tale scissione. La soluzione del problema potrebbe poi spingersi fino al punto di stabilire se in particolari condizioni la fitasi, analogamente a quanto viene operato da altri enzimi, può esercitare anche attività sintetizzante sui componenti dell'acido fitinico.

Da qualche anno ho avuto occasione di interessarmi dell'estrazione della fitina da vegetali di varia origine, ma sopratutto dalla pula di riso che rappresenta il materiale che dà una maggiore resa e dal quale con minore difficoltà si riesce ad estrarlo.

Dai campioni di fitina ottenuti, qualunque fosse il loro contenuto di fosforo, calcio e magnesio ho preparato secondo Posternak [12]) campioni di acido fitinico che all'analisi hanno sempre mostrato un contenuto di fosforo costante ed in accordo con la formula datane. Così pure il fitinato di sodio dagli stessi campioni ricavati secondo la tecnica di Postarnak [13]) ha presentato all'analisi una composizione corrispondente alla formula: $C_6H_{12}O_{37}P_6Na_{12}$.

Ho iniziato pertanto ricerche sull'argomento prendendo in esame l'andamento della scissione enzimatica dell'acido fitinico da parte della fitasi estratta dall'orzo tallito e come substrato mi sono servito del fitinato di sodio, finora mai adoperato a questo scopo da altri AA., sale questo che, come si è già detto, ha una composizione costante, è abbastanza solubile in acqua ed è molto stabile.

Per quanto riguarda l'enzima fitasi è qui opportuno rammentare che è stata, per la prima volta presa in esame da Suzuki e Yoshimura [14]). Ho-

---

[10]) Compt. rend., *199*, 1653, 1934.

[11]) Compt. rend., *186*, 261, 1928.

[12]) Compt. rend., *137*, 337, 1903.

[13]) » » *168*, 1216, 1919.

[14]) Bull. College Agricult. Tokio, 8, n. 4, 395, 1907.

RIUCHI [15]) ne ha sostenuto la specificità, SHIMODA ha studiato la fitasi estratta dall' *Aspergillus Orizae* e dal *Micoderma* [16]), LÜERS e SILBEREISEN [17]) quella dell'orzo. Tutti questi AA. hanno adoperato come substrato la fitina estratta da vegetali.

Uno studio sistematico della cinetica enzimatica della fitasi manca e poichè ho ritenuto che la delucidazione delle condizioni di scissione enzimatica dell' acido fitinico possa contribuire ad approfondire la conoscenza della sua costituzione, ho compiuto le indagini di cui riferisco nella presente nota.

I. *Preparazione della fitasi.* — Per la preparazione dell'enzima si è seguito in linea generale la tecnica consigliata da L. ADLER [18]). A tal' uopo 2 kg. di orzo vengono fatti germogliare secondo le modalità indicate da LÜERS [19]) per la preparazione della fitoamilasi. Il prodotto ottenuto, noto col nome di malto verde, si tritura con un comune tritacarne e si estrae per sbattimento continuo con cc. 3000 di una soluzione acquoso-alcoolica al 2,5 % di alcool. La parte solida si separa per pressione attraverso un torchietto da laboratorio ed il liquido torbido ottenuto si filtra. L'enzima si precipita aggiungendo a questa soluzione alcool a 95° nel rapporto di 3,5 volte il suo volume. Il precipitato ottenuto si lascia sedimentare, il liquido soprastante si sifona ed il residuo si centrifuga. Il centrifugato si addiziona successivamente di una miscela a parti uguali di alcool e di etere etilico mescolando bene, quindi si filtra per filtro a vuoto. Si ottiene così una polvere di colorito giallognolo che si essicca distendendola su di una lastra di vetro e lasciandola per qualche giorno in essiccatore a vuoto su acido solforico. Ho ottenuto in tal modo 15 gr. di polvere secca con una resa quindi di 0,75 % sull' orzo impiegato.

Con la polvere così ottenuta ho preparato poi gli estratti enzimatici nel seguente modo: circa un gr. della polvere viene sospeso in 100 cc. di soluzione fisiologica di cloruro di sodio toluolica ed il miscuglio si tiene in bottiglia a tappo smerigliato per una notte in agitatore. All'indomani la soluzione è filtrata per lana di vetro ed il filtrato è pronto per le misure.

II. *Preparazione del substrato.* — Come substrato si è adoperata una soluzione di fitinato di sodio all' 1 % in acqua distillata. Questo si è prepa-

---

[15]) Journ. of Biochem., *14*, 163, 1931.

[16]) Z. Bakt., (2), *71*, 232, 1927.

[17]) C. OPPENHEIMER, *Die Fermente und ihre Wirkungen*, Lief. II, suppl. p. 170, Berlin, 1935.

[18]) Biochem. Z., *75*, 319, 1916.

[19]) C. OPPENHEIMER u. L. PINCUSSEN, *Die Methodik der Fermente*. Lief. III, P. 872, 1928. G. THIEME, Leipzig.

rato secondo le precise indicazioni date da Posternak (l. c.) da un campione di fitina estratta dalla pula di riso tenendo conto della tecnica consigliata da Marotta (l. c.) e che all'analisi ha dato:

$$P\,\%_0\ 18{,}75\ ;\ Ca\,\%_0\ 8{,}40\ ;\ Mg\,\%_0\ 10{,}52.$$

Il fitinato di sodio in tal modo ottenuto allo stato di grande purezza seccato in istufa a vuoto ha dato all'analisi:

$$P\,\%_0\ 18{,}82\ ;\ Na\,\%_0\ 27{,}85.$$

Calc. per $C_6H_{12}O_{27}P_6Na_{12}$; $P\,\%_0$ 19,11 ; $Na\,\%_0$ 28,21.

Con tale prodotto particolarmente adatto allo scopo delle ricerche in questione, sono state preparate le varie soluzioni impiegate da substrato, col titolo costante di fitinato dell'1 %: un cc. di dette soluzioni contiene quindi mg. 1,882 di fosforo combinato.

III. *Scissione in funzione del pH.* — Le esperienze sono state condotte nel modo seguente: stabilito in prove preliminari l'optimum di temperatura, che fu trovato corrispondere a 42°, in una serie di matraccini tarati da 10 cc. venivano distribuiti: cc. 2 di fitinato di sodio all'1 %, cc. 2 di soluzione tampone veronal-acetato sodico [20]) per i pH indicati nella tabella e cc. 2 di estratto enzimatico portando poi a segno con acqua distillata bollita. Dopo due ore di permanenza in termostato a 42° si determinava il fosforo scisso secondo Fiske e Subbarov [21]). I risultati sono qui di seguito riportati:

pH	Fosforo scisso mg	Fosforo scisso %	pH	Fosforo scisso mg	Fosforo scisso %
9,64	0,02	0,9	5,32	0,44	16,3
8,90	0,06	2,2	4,93	0,42	15,5
8,55	0,10	3,6	4,66	0,45	16,6
7,90	0,17	6,4	4,33	0,61	22,2
7,42	0,26	9,6	4,13	0,74	27,0
7,25	0,31	11,4	3,88	1,00	36,4
6,99	0,37	13,5	3,62	0,95	34,7
6,75	0,41	15,1	3,20	0,88	32,1
6,12	0,46	17,0	2,62	0,72	26,3

Come si vede, l'estratto di fitasi adoperato presenta due optimum di pH, uno a 6,12, l'altro a 3,88. Da rilevare che finora è stato riscontrato un

[20]) Michaelis L., Biochem Z.; *234*, 138, 1931.

[21]) J. biol. Chem., *66*, 375, 1925.

solo optimum di pH operando direttamente sulla fitina e precisamente: pH 4,3 per la fitasi della crusca, pH 5,2 — 5,3 per la fitasi dell'orzo. Per il monofosfato dell'inosite invece, l'optimum per la fitasi della crusca di riso è 5,6, per la fitasi dei reni, 3,1 (Oppenheimer, l. c.).

IV. *Scissione in funzione del tempo.* — Stabilito che la fitasi dell'orzo presenta due optimum di pH, si è voluto studiare la velocità della scissione nelle condizioni sperimentali indicate. Pertanto si è operato come sopra, tamponando le soluzioni ai due optimum di pH trovati e prelevando i matraccini dal termostato secondo i tempi indicati nella tabella che segue, in corrispondenza dei quali risultano i valori ottenuti nelle determinazioni del fosforo scisso:

	pH 6,12		pH 3,88	
Tempo in h	Fosforo scisso mg	Fosforo scisso %	Fosforo scisso mg	Fosforo scisso %
4	0,56	20,5	1,15	41,6
8	0,65	23,8	1,45	52,8
12	0,70	25,4	1,69	61,5
16	0,78	28,6	1,91	69,4
20	0,85	30,2	2,11	76,6
24	0,90	32,8	2,30	83,2
28	0,91	33,1	2,52	91,5
32	0,89	—	2,71	98,2
36	0,90	—	2,70	—
40	0,89	—	2,69	—
44	0,91	—	2,72	—

Dall'esame della tabella risulta pertanto che a pH 6,12 il massimo di fosforo scisso, dopo circa 24 h, si aggira sul 33 % e che tale rimane anche in seguito ad una più prolungata permanenza in termostato; ciò che ci autorizza a formulare l'ipotesi che in tali condizioni si ha semplicemente il distacco di due atomi di fosforo (32,5 % del P totale) ed il passaggio dall'esafosfato al tetrafosfato d'inosite. Viceversa a pH 3,88 si ottiene il distacco di tutto il fosforo combinato (98,2 %) e quindi la completa scissione dell'esafosfato d'inosite.

V. *Scissione in funzione della concentrazione di enzima.* — La scissione del fitinato di sodio ad opera della fitasi in funzione della concentrazione di enzima è stata presa in esame allo scopo di stabilire se analogamente a quanto si verifica per altri estratti enzimatici fosse va-

lida la legge di Schütz [22]). A tale scopo in una serie di matraccini tarati da 25 cc venivano distribuiti: 2 cc. di substrato tamponato a pH 3,88 e volumi cresenti di estratto enzimatico. Dopo aver portato a volume si lasciavano 2 h in termostato a 42°, determinando poi il fosforo scisso. I risultati ottenuti sono i seguenti:

Y Fosforo scisso mg	x Estratto enzimatico cc.	$\frac{y^2}{x}$
0,67	1	0,44
0,94	2	0,44
1,15	3	0,44
1,33	4	0,44
1,48	5	0,43
1,62	6	0,43
1,75	7	0,43
1,87	8	0,43
2,00	9	0,44
2.14	10	0,45
		0,43 (media)

Con i valori di x e di y sono stati calcolati quelli dei parametri in base a $p = \frac{y^2}{x}$ essendo l'equazione del tipo $y^2 = px$. Risulta che per l'estratto in esame la scissione del fitinato di sodio in funzione della concentrazione di enzima può essere espressa dall'equazione: $y^2 = 0{,}43 \cdot x$ che è conforme alla suddetta legge.

VI. *Scissione in funzione della concentrazione del substrato.* — Per questa determinazione venivano distribuiti in matraccini tarati da 25 cc. volumi crescenti di substrato all'1 % di fitinato di sodio tamponato rispettivamente a pH 6,12 e pH 3,88, secondo l'indicazione della tabella e 2 cc. di estratto enzimatico. Dopo due ore di permanenza in termostato a 12° si determinava il fosforo scisso. I valori ottenuti sono qui di seguito riportati:

[22]) H. Euler, *Chemie der Enzyme*, 1, 161, 1925.

Substrato cc.	P scisso mg pH 6,12	pH 3,88
2	0,44	0,97
4	0,50	1,10
6	0,55	1,21
8	0,61	1,30
10	0,64	1,38
12	0,68	1,46
14	0,71	1,52
16	0,70	1,51
18	0,72	1,53
20	0,71	1,52

Dall'osservazione dei suddetti dati si può concludere che oltre una certa concentrazione i valori della scissione rimangono quasi costanti, mentre la percentuale di scissione va decrescendo in rapporto alla quantità di substrato. Tale fenomeno si ammette sia dovuto ad un'azione inibitrice dei prodotti di scissione del substrato che si riscontra in vari enzimi idrolasici (Euler: l. c.).

In tutte le esperienze riferite sono state sempre eseguite prove in bianco col solo substrato e col solo estratto enzimatico, così pure si è avuto cura di controllare il pH nelle miscele preparate a parte, apportando le necessarie correzioni laddove se ne presentava la necessità.

Conclusioni. — Dai risultati ottenuti nel presente studio delle scissioni del fitinato di sodio da parte della fitasi ricavata dall'orzo tallito si può stabilire che:

1) L'estratto enzimatico adoperato presenta due optimum di pH: uno a 6,12, l'altro a 3,88. A pH 6,12 si ottiene la scissione dell'esafosfato di inosite in tetrafosfato. Questo subisce l'idrolisi enzimatica completa a pH 3,88;

2) per l'enzima preso in esame l'andamento della scissione in funzione della concentrazione di questo segue con buona approssimazione la legge di Schütz;

3) con l'aumentare della concentrazione del substrato aumenta la quantità del fosforo scisso fino ad un certo punto oltre il quale rimane costante, in conformità del comportamento di altri enzimi idrolasici.

Napoli — Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università. — giugno 1942-XX.

Il cratere del Monte Nuovo disegnato da Francisco de Hollanda nel febraio del 1540.

Nota del socio **Giuseppe De Lorenzo**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

(con una tavola)

Sunto. — In questa Nota viene brevemente illustrato un disegno del cratere del Monte Nuovo, eseguito dal noto disegnatore portoghese Francisco de Hollanda nel febraio del 1540, ossia appena quindici mesi dopo la celebre eruzione che diede origine al Monte Nuovo.

Il nostro socio, e soprintendente del R. Archivio di Stato, conte Riccardo Filangieri di Candida, ha avuto la bontà di darmi, corredandola di notizie, perchè ne parlassi all'Accademia, la fotografia, che qui presento, di un disegno del cratere del Monte Nuovo, eseguito da Francisco de Hollanda nel febraio del 1540.

Francisco de Hollanda, nato a Lisbona circa il 1517 da Antonio, alluminatore di re Manuel I, fu inviato, appena ventenne, da re Giovanni III in Italia, per studiarvi i monumenti antichi della romanità e le nuove opere di architettura del rinascimento. Giunse nel 1538 a Roma, dove ebbe la fortuna di cattivarsi la simpatia del *terribile* Michelangelo e di potere assistere alle sue conversazioni con Vittoria Colonna e con altri pochi amici, delle quali ci ha lasciato fedeli trascrizioni nell'opera *Da pintura antiga*, dalla quale sono tratti *I Dialoghi Michelangioleschi* di Francisco d'Olanda, pubblicati a Roma, presso Maglioni e Strini, nel 1924.

Francisco de Hollanda rimase in Italia fino al 1547, percorrendola in lungo ed in largo, studiando e disegnando monumenti antichi e nuovi, fortezze, paesaggi e costumi e riunendo i risultati del suo lavoro in un prezioso codice, costituito di 54 fogli, che si conserva nella Bibtioteca dell'Escorial ed è stato riprodotto nel 1540 a Madrid da Elias Tormo col titolo *Os desenhos das antigualhas que vio Francisco d' Ollanda pintor portuguès*. Il foglio 53 di tale codice contiene i disegni eseguiti da Francisco de Hollanda nel 1540 nei Campi Flegrei: cioè l'ingresso della grotta di Pozzuoli, un panorama del golfo di Pozzuoli ed il cratere del Monte Nuovo, di cui qui si presenta la riproduzione.

L'eruzione, che diede origine al Monte Nuovo, scoppiò, come è noto, ad un'ora di notte del 29 settembre 1538. Il modo, come essa si svolse, ci fu, con mente critica moderna, sinteticamente esposto da Eduard Suess

nel secondo volume della sua opera *Das Antlitz der Erde,* in cui egli utilizzò le decrizioni e le narrazioni dei testimoni oculari e dei contemporanei dell'avvenimento. Il primo di essi è il valente medico e naturalista napolitano Simone Porzio, allievo del Pomponazzi e professore di filosofia, prima nell'Università di Napoli e poi in quella di Pisa; il quale, per incarico del vicerè don Pietro di Toledo, per calmare la paura della popolazione e per dare una spiegazione naturale del fenomeno, gli scrisse un'epistola in latino, *De conflagratione agri puteolani Simonis Portii,* di cui la prima edizione fu pubblicata a Napoli nel 1538 e la seconda a Firenze nel 1551. Un'altra breve narrazione, in versi latini, dedicata al pontefice Paolo III, fu scritta da Girolamo Borgia, soldato, poeta e poi vescovo di Massalubrense: *Incendium ad Avernum lacum horrible pridie cal. octob. MDXXXVIII nocte in tempesta exortum,* Neapoli Idibus Octobris MDXXXVIII. Una terza descrizione, con maggiori particolari ed in prosa italiana, fu scritta da Marco Antonio Delli Falconi, che, recandosi da Salerno a Roma, per portare un messaggio di Bernarso Tasso al papa Paolo III, si fermò ai primi di ottobre del 1538 nei dintorni di Napoli ed osservò varie manifestazioni eruttive del Monte Nuovo: *Dell'incendio di Pozzuolo Marco Antonio Delli Falconi all'illustrissima signora Marchesa della Padula nel MDXXXVIII; si venne per Marco Antonio Passaro alli Ferri Vecchi,* in Napoli. Un quarto ed ultimo documento è costituito da una lettera di Francesco del Nero, rappresentante della corte dei Medici in Napoli, a Niccolò Del Benino, *Sul terremoto di Pozzuolo dal quale ebbe origine la Montagna Nuova nel 1538:* lettera stampata per la prima volta, dal manoscritto, nell'Archivio storico italiano del 1846. I primi tre documenti, del Porzio, del Borgia e del Falconi, furono raccolti, commentati e pubblicati da Lorenzo Giustiniani: *I tre rarissimi opuscoli di Simone Porzio, di Girolamo Borgia e di Marcantonio Delli Falconi scritti in occasione della celebre eruzione avvenuta in Pozzuoli nell'anno 1538,* Napoli MDCCCXVII. Delle quattro descrizioni le più interessanti, per l'illustrazione del disegno di Francisco de Hollanda, sono quelle di Simone Porzio e di Marcantonio Delli Falconi; che danno un'idea, la prima più concisa e la seconda più diffusa, dell'aspetto del cratere, subito dopo la sua formazione.

Scrive dunque il Falconi: «Cosa veramente che parrà a chi non l'ha veduta incredibile, che in un giorno et una notte sia fatto uno così gran monte, alla sommità del quale è fatta una bocca a guisa di coppa che sarà di circuito d'un quarto di miglio, donde esala continuamente fumo, et già da lunge io l'ho veduto et mi pare assai grande. La domenica seguente, che furo li sei di ottobre, erano andate molte persone a vedere, et essendo ascese parte insino al mezzo, e parte più, del monte, verso le XXII hore si levò un sì spaventoso et subito incendio et fumo sì grande, che molte di quelle persone si sono affogate et molte non si trovano nè

morte nè vive. Dal hora in qua non si è visto effetto notabile. Et pare che ritorni da periodo in periodo, come la quartana. Credo che per l'avenire non haverà tanta forza, benchè pur torni.» Ed infatti nel disegno di Francisco DE HOLLANDA, eseguito circa quindici mesi dopo la descrizione del FALCONI, si vedono solo esalare dal fondo del cratere alcune spirali di fumo bianco, quali si sogliono vedere nei crateri allo stato di solfatara.

Il disegno di Francisco DE HOLLANDA, se si prescinde da una certa esagerazione delle altezze in confronto delle lunghezze, difetto comune a molti disegnatori e pittori di paesaggio, è molto preciso ed accurato e risponde bene alla forma della bocca del vulcano quale si vede ancor oggi, quattrocento anni dopo la sua formazione. Nel fondo a sinistra si scorge il golfo di Gaeta, fino al promontorio di Gaeta stessa ed a quello, ancor più remoto, di Terracina. Più prossima e la cerchia, che chiude ad occidente il lago di Averno, intaccata dall'Arco Felice, che apre il passaggio verso l'acropoli di Cuma. Subito sotto il cono del Monte Nuovo si apre il cratere-lago dell'Averno con le rovine del cosidetto tempio di Apollo: ed intorno ad esso la campagna appare tutta bianca e brulla, con pochi alberi spogli e scheletriti; in parte, forse, perchè era ancora d'inverno, ma in parte, anche, perchè durava forse ancora l'effetto dell'eruzione di cenere, quale fu vista e descritta da Marcantonio DELLI FALCONI: « Innumerabili arbori per tutto quel paese, insino alla grotta di Lucullo, svelti dalle proprie radici, prostrati in terra, coperti di cenere ch'era una pietà a vederli.» Tale effetto si vede ancor meglio nel disegno del cratere, assai ben delineato, con la cima orientale, acuta e più alta, a 140 metri sul mare, e col restante orlo arrotondato, che si abbassa ad una incollatura di 90 metri di altezza sul mare.

A tale incollatura il DE HOLLANDA giunse a cavallo, come si vede nel disegno e come si può giungervi anche oggi. Innanzi a lui si apriva l'imbuto fumante del cratere, col diametro di circa quattrocento metri nell'orlo superiore e di un centinaio nel fondo; il quale ora, colmato dal materiale portato giù dalle acque pluviali, si trova a 13-14 metri sul mare, ma allora doveva essere a livello del mare e forse anche più basso. Attualmente le pendici esterne ed interne del cono craterico, se si eccettui la falda meridionale, scavata per le sue nere scorie trachifonolitiche, chiamate localmente *ferrugine*, è tutta rivestita dei cespugli della bassa macchia mediterranea, specialmente ginestre; sostituite nelle falde occidentali e settentrionali da ubertose vigne e coronate dai bellissimi pini campani. Ma allora, quando vi salì Francisco DE HOLLANDA, non vi era ancora spuntato filo d'erba. Tutta la sommità del cono non era che cenere arida e brulla, incastrata di scorie e di blocchi rigettati e segnata radialmente dai solchi scavati dalla caduta dei massi e dalla erosione dell'acqua di pioggia. Dal fondo, che doveva allora trovarsi in uno stato di attività maggiore di quello dell'attuale Solfatara, si svolgevano grandi volute di vapore

bianco: e tale attività continuò, sempre declinando, durante il cinquecento, il seicento ed il settecento, finchè si spense. Ora, dopo quattro secoli dalla sua formazione, il Monte Nuovo si può dire veramente estinto. Infatti, mentre ad oriente di esso la Solfatara e ad occidente le sponde del Lucrino e le Stufe di Nerone rivelano superficiali acque calde ed elevate temperature sotterranee, il fondo del cratere del Monte Nuovo invece, trivellato profondamente per circa cinquecento metri, non ha rivelato alcun notevole aumento di calore sotterraneo. Ora veramente si può dire, che l'interno del Monte Nuovo è, come canta D'Annunzio, immoto, vacuo, taciturno, come un cratere spento.

L'abitazione a corte in Sardegna (Campidano) e l'origine mediterranea della corte.

Memoria di **Francesco Castaldi**

(presentata nell'adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX
per essere inserita nel vol. II, serie 3ª, degli Atti)

Sunto. — L'A. descrive un tipo di abitazione a corte, che si rinviene nella Sardegna meridionale, e, postolo in rapporto con altri tipi di analoghe abitazioni diffuse nella Pianura Padana e in Campania, si propone di ricercarne l'origine. Mentre la corte italiana appare derivazione della *villa rustica* romana, che, dal suo primo significato di *fundus* passata ad indicare il casamento rurale, ripeteva lo schema tradizionale di una primitiva forma di insediamento propria dei popoli mediterranei, la corte sarda ha mantenuto nel tempo integralmente il tipico carattere strutturale di abitazione mediterranea, come puro schema architettonico, non subordinato a particolari funzioni economiche.

G. De Lorenzo, Il cratere del Monte Nuovo disegnato da Fr. di Hollanda.

Alcune estensioni del determinante di Vandermonde.

Nota del prof. **Giuseppe Giuga**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 7 marzo 1942 - XX)

Sunto. — Si calcolano svariati determinanti i cui valori si esprimono generalmente in funzione di uno o più determinanti di Vandermonde. Si rivendica al Trudi la priorità su un notevole vandermondiano; se ne dà una nuova calcolazione, se ne considera un altro affine, e si generalizzano entrambi in più modi.

Introduzione.

Il lavoro che presentiamo si divide in tre parti:

Nella 1ª (§ 1 — *Determinanti di numeri figurati, aventi rapporto con quello di* Vandermonde), con estrema semplicità, vengono sviluppati e generalizzati determinanti di sicuro interesse, dovuti a vari autori (Borchardt, Stern, Zeipel, Studnicka, Sibirani).

L'oggetto della 2ª parte, poi (§ 2 — *Determinanti dipendenti da uno o più parametri interi, e che per valori particolari di questi si riducano al tipo di* Vandermonde), vuole soprattutto essere la riesumazione di un determinante di Vandermonde generalizzato, dovuto al Trudi, non compreso nelle più comuni indicazioni bibliografiche relative alle estensioni del determinante di Vandermonde (*Enc. Mat. Elem.*, p. II, vol. I, p. 103-104. U. Hoepli, Milano, 1932; E. Pascal, *I determinanti*, U. Hoepli, Milano, 1923, p. 195-197) mentre lo è un caso particolare considerato come nuovo (posteriormente al Trudi) da D. Besso (*Rend. Acc. Lincei*, 1883, p. 21).

Trattasi del determinante XX di questo nostro lavoro, il caso particolare considerato dal Besso essendo, in altra forma, quello corrispondente all'ipotesi: $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = 2$.

Abbiamo avuto notizia del determinante XX da una Memoria di A. Bonolis (*Sviluppo di alcuni determinanti. Giorn. Mat.* (15) 1877, p. 113) mentre, similmente al Besso, eravamo sul punto di pubblicare come nuovo il risultato che si riferisce al caso particolare di $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = p$.

Ecco testualmente ciò che dice il Bonolis a proposito di tale determinante:

« .... si trova in una Memoria del chiarissimo Professore Trudi sulle « equazioni differenziali da poco pubblicate e questo egregio Professore ne « calcola il valore per mezzo della teoria che ivi espone; però il suo svi-

« luppo è stato ottenuto con mezzi elementari dal già più volte encomiato « V. Ianni che ne ha fatto oggetto di una Nota stampata pochi giorni fa. »

Per l'evidente insufficienza di queste indicazioni abbiamo rinunciato a rintracciare i lavori del Trudi e del Ianni, e non abbiamo sotto mano che quello del Bonolis.

Il Bonolis si occupa principalmente del seguente determinante, più generale di XX:

$$S = \begin{vmatrix} \binom{m+0}{0} a^0 & \binom{m+s}{0} a^s & \dots & \binom{m+(n-1)s}{0} a^{(n-1)s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+0}{\alpha-1} a^0 & \binom{m+s}{\alpha-1} a^s & \dots & \binom{m+(n-1)s}{\alpha-1} a^{(n-1)s} \\ \binom{m+0}{0} b^0 & \binom{m+s}{0} b^s & \dots & \binom{m+(n-1)s}{0} b^{(n-1)s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+0}{\beta-1} b^0 & \binom{m+s}{\beta-1} b^s & \dots & \binom{m+(n-1)s}{\beta-1} b^{(n-1)s} \\ \binom{m+0}{0} c^0 & \binom{m+s}{0} c^s & \dots & \binom{m+(n-1)s}{0} c^{(n-1)s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

con $n = \alpha + \beta + \gamma \dots$.

Con un procedimento assai faticoso, calcola il valore del determinante S nell'ipotesi $n = \alpha + \beta$, e si limita ad affermare che continuando a ragionare nello stesso modo si perviene allo sviluppo relativo al caso generale.

Dobbiamo peraltro dire che a noi l'affermazione non sembra fondata. Comunque sia, il lavoro non è certamente di quelli che si possono dire ben elaborati, il che spiega, almeno in parte, come non sia riuscito ad attrarre l'attenzione degli studiosi.

Incidentalmente, accade di dover rilevare che spetta al Bonolis la priorità sulla formola

$$D = \dots d_m^{m+1}$$

che assegna il valore del determinante

$$D = \begin{vmatrix} d_m & d_m & \dots & d_m \\ d_{m-1,r} & d_{m-1,r+1} & \dots & d_{m-1,r+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{0,r} & d_{0,r+1} & \dots & d_{0,r+m} \end{vmatrix}$$

(dove $d_{0,r}$, $d_{0,r+1} \ldots d_{0,r+m}$ sono termini consecutivi di una progressione aritmetica di ordine m, e $d_{h,r}$, $d_{h,r+1} \ldots d_{h,r+m}$ le differenze h^{λ} $(h = 1, 2, \ldots, m)$, almeno nei confronti di Raimondi (*Giorn. Mat.* (27) 1887), cui viene attribuita da E. Pascal (cit.), da L. Tenca (*Le progressioni* — R. Giusti Livorno) e da noi medesimi che abbiamo attinto a queste fonti, nell'articolo: *Le progressioni* (Riassunto di una Memoria) — Eserc. Mat. del Circ. Mat. di Catania, 1941.

Il Bonolis si occupa del determinante D all'inizio della prefata Memoria.

Ritornando alla nostra Memoria, abbiamo cominciato la 2ª parte calcolando il determinante XX in due tempi; considerando, nel 1°, il caso rappresentato dal determinante XIX e, successivamente, quello generale.

Giovandoci, poi, di due nostre generalizzazioni di un determinante di Stern, di cui alla 1ª parte, abbiamo potuto con facilità pervenire ai determinanti XXI e XXII i quali, oltre a essere più generali di XX, sono più generali di S e di altri collaterali considerati dal Bonolis nella stessa Memoria.

Lo studioso vedrà se, e in qual misura, a prescindere dai lavori del Trudi e del Ianni, questa 2ª parte della nostra Memoria segni un progresso rispetto a quella del Bonolis.

Passiamo a dire della 3ª parte (§ 3 — *Altre estensioni del determinante di* Vandermonde).

Mentre il determinante XX, del Trudi, dopo la Memoria del Bonolis è rimasto sterile e dimenticato, il caso particolare considerato dal Besso ha fruttato una prima generalizzazione per opera di R. Marcolongo (Giorn. Mat. (25) 1887) e un'ulteriore generalizzazione per opera di G. Andreoli Giorn. Mat. (52) 1913).

Sorvolando sulla Nota del Marcolongo, riportiamo il seguente risultato dell'Andreoli.

Dati $(m+1)n$ *polinomi* $(m > 0)$ $P_0(x), P_1(x) \ldots$ *fra cui non esista alcuna relazione lineare, e indicate con* $P_0(x), P'_0(x), P''_0(x) \ldots$ *le loro derivate, il determinante di ordine* $(m+1)n$:

$$\Delta_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_0'(x_1) \ldots P_0^{(m)}(x_1) & P_0(x_2) & P'_0(x_2) \ldots P_\rho^{(m)}(x_2) \ldots \\ P_1(x_1) & P'_1(x_1) \ldots P_1^{(m)}(x) & P_1(x_2) & P'_1(x_2) \ldots P_m^{(m)}(x_2) \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_r(x_1) & P'_r(x_1) \ldots P_r^{(m)}(x_1) & P_r(x_2) & P'_r(x_2) \ldots P_r^{(m)}(x_2) \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

è uguale, salvo un fatto numerico, alla potenza $(m+1)^2$ *del determinante di* Cauchy (o di Vandermonde) *relativo alla quantità* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Noi, dopo avere calcolato il determinante XXIII, affine al XX, e non

meno notevole, abbiamo potuto con facilità pervenire ai determinanti XXIV XXV e XXVI, generalizzando con ciascuno dei primi due, il su riportato risultato dell'Andreoli e precisandone il fattore numerico.

Tutti e tre questi nostri determinanti contengono, rispettivamente, come casi particolari, i determinanti I, II e III, di cui alla 1ª parte, assai noti fra le estensioni del determinante di Vandermonde.

Una segnalazione speciale riteniamo meriti il nostro determinante XXVII, con i casi particolari che vi si riferiscono. Tra questi, i determinanti XXXIII e XXXIV, al pari di XIV e XV, di cui alla 1ª parte, esprimono, salvo un fattore numerico, il discriminante di n variabili.

Si noti come siano semplicemente formati i determinanti XIV e XXXIII, con tutte le n^2 somme due a due di n variabili, e i determinanti XIV e XXXIV con tutte le n^2 differenze a due a due.

Come spiegare, infine, che il determinante XX del Trudi non sia stato considerato fra le generalizzazioni del determinante di Vandermonde, contrariamente a quello del Besso?

Il Bonolis non ha rilevato che il determinante XX per $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$ si riduce a quello di Vandermonde. Lo stesso rilievo sarà sfuggito al Ianni e al Trudi. Che il determinante del Besso sia una generalizzazione del determinante di Vandermonde, appare chiaramente, se non altro, dai lavori del Marcolongo e dell'Andreoli.

Senza volere andare troppo lontano, potrebbe essere questa una spiegazione.

§ 1. — *Determinanti di numeri figurati aventi rapporto con quello di* Vandermonde.

1. Il determinante:

$$\text{I} \qquad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \ldots\ldots f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \ldots\ldots f_2(x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) \ldots\ldots f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

dove

$$f_i(x) = C_{i1} + C_{i2}\,x + \ldots\ldots\ldots + C_{in}\,x^{n-1} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

vale manifestamente:

$$| C_{ij} |\, V(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

dove $| C_{ij} |$ è il determinante di tutte le C e $V(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ è il determinante di Vandermonde formato con le quantità $x_1\, x_2, \ldots, x_n$.

2. In particolare, il determinante:

$$\text{II} \qquad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \dots\dots f_1(x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) \dots\dots f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

dove:

$$f_i(x) = C_{i0} + C_{i1}x + \dots\dots + C_{ii}x^i \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

vale: [1])

$$C_{11}\, C_{22} \dots \dots C_{n-1\,n-1}\; V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

3. Il determinante:

$$\text{III} \qquad \begin{vmatrix} F(x_1, y_1) & F(x_1, y_2) \dots\dots F(x_1, y_n) \\ F(x_2, y_1) \dots\dots F(x_2, y_2) \dots\dots F(x_2, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(x_n, y_1) & F(x_n, y_2) \dots\dots F(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

dove:

$$F(x, y) = f_1(x) + y f_2(x) + \dots\dots + y^{n-1} f_n(x),$$

con

$$f_i(x) = C_{i1} + C_{i2}x + \dots\dots + C_{in}x^{n-1}$$

vale: [2])

$$|C_{ij}|\; V(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)\; V(y_1, y_2, \dots\dots, y_n) \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Ed invero, è manifesto che il determinante III è uguale al prodotto di $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ per il determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \dots\dots f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \dots\dots f_n(x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) \dots\dots f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

il quale è del tipo II.

---

[1]) C. W. Borchardt. Abh. Ak. Berlin, 1860, p. 1; *Werke*, Berlin 1888, p. 151.

[2]) C. W. Borchardt, Monatsber. Ak. Berlin, 1859, p. 376; *Werke*, Berlin 1888, p. 131.

4. Nel determinante II, le più semplici ipotesi che si possono fare su $f_i(x)$ sono:

$$f_i(x) = x^i;$$
$$f_i(x) = \binom{x}{i}.$$

Alla 1ª ipotesi corrisponde $V(x_1\, x_2, \ldots, x_n)$; alla 2ª ipotesi corrisponde il seguente determinante considerato da STERN [3]):

$$\text{IV} \qquad St(x_1, x_2, .., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \cdots\cdots & \binom{x_n}{1} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \cdots\cdots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore risulta:

$$\frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1!\ 2! \ldots\ldots (n-1)!};$$

ovvero:

$$\frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{V(1, 2, \ldots\ldots, n)}.$$

5. Il determinante di VANDERMONDE $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ scritto nella forma analoga a quella di IV, e il determinante IV di STERN godono rispettivamente delle proprietà:

a) Se alle basi delle potenze di ciascuna riga si aggiunge una medesima quantità, variabile da riga a riga, il determinante di VANDERMONDE non cambia di valore.

Cioè, si ha:

$$\text{V} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ (x_1 + y_1)^1 & (x_2 + y_1)^1 \cdots\cdots (x_n + y_1)^1 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ (x_1 + y_{n-1})^{n-1} & (x_2 + y_{n-1})^{n-1} \cdots\cdots (x_n + y_n)^{n-1} \end{vmatrix} = V(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

b) Se alle basi dei coefficienti binomiali di ciascuna riga si aggiunge una medesima quantità variabile da riga a riga, il determinante di STERN non cambia di valore.

---

[3]) STERN — Crelle's J. vol. LXVI, p. 287-288 (1865).

Cioè, si ha:

$$\text{VI} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \binom{x_1+y_1}{1} & \binom{x_2+y_1}{1} & \dots\dots & \binom{x_n+y_1}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1+y_{n-1}}{n-1} & \binom{x_2+y_{n-1}}{n-1} & \dots\dots & \binom{x_n+y_{n-1}}{n-1} \end{vmatrix} = St(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Col simbolo $St(x_1, x_2, \dots, x_n)$ abbiamo indicato il determinante di STERN formato con le quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Le V e VI sussistono perchè i determinanti a 1° membro si ottengano dal determinante II, facendo rispettivamente:

$$f_i(x) = (x + y_i)^i,$$
$$f_i(x) = \binom{x+y_i}{i}.$$

6. Consideriamo il seguente determinante più generale di quello di STERN ($p = 0$)

$$\text{VII} \qquad \begin{vmatrix} \binom{x_1}{p} & \binom{x_2}{p} & \dots\dots & \binom{x_n}{p} \\ \binom{x_1}{p+1} & \binom{x_2}{p+1} & \dots\dots & \binom{x_n}{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{p+n-1} & \binom{x_2}{p+n-1} & \dots\dots & \binom{x_n}{p+n-1} \end{vmatrix}$$

Proveremo che il suo valore è:

$$\frac{\binom{x_1}{p}\binom{x_2}{p}\dots\dots\binom{x_n}{p}}{\binom{p}{p}\binom{p+1}{p}\dots\dots\binom{p+n-1}{p}} \cdot \frac{V(x_1, x_2, \dots\dots x_n)}{V(1, 2, \dots\dots, n)}$$

Ed infatti, si trasformi ogni coefficiente binomiale di VII secondo la formola:

$$\binom{r}{s} = \frac{\binom{r}{p}}{\binom{s}{p}} \binom{r-p}{s-p}$$

e si mettano quindi in evidenza i fattori $\binom{x_1}{p}, \binom{x_2}{p} \dots\dots \binom{x_n}{p}$ comuni ri-

spettivamente agli elementi della $1^a, 2^a, \ldots\ldots, n^a$ colonna, e i fattori $\frac{1}{\binom{p}{p}}, \frac{1}{\binom{p+1}{p}}, \ldots\ldots \frac{1}{\binom{p+n-1}{p}}$ comuni rispettivamente agli elementi nella $1^a, 2^a \ldots\ldots n^a$ riga.

Il determinante VII risulta uguale all'espressione:

$$\frac{\binom{x_1}{p}\binom{x_2}{p}\ldots\ldots\binom{x_n}{p}}{\binom{p}{p}\binom{p+1}{p}\ldots\ldots\binom{p+n-1}{p}}$$

moltiplicata per il determinante:

$$\begin{vmatrix} \binom{x_1-p}{0} & \binom{x_2-p}{0} \ldots\ldots \binom{x_n-p}{0} \\ \binom{x_1-p}{1} & \binom{x_2-p}{1} \ldots\ldots \binom{x_n-p}{1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{x_1-p}{n-1} & \binom{x_2-p}{n-1} \ldots\ldots \binom{x_n-p}{n-1} \end{vmatrix}$$

il quale essendo dal tipo IV (di STERN) ha per valore:

$$\frac{V(x_1-p\ ,\ x_2-p\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x_n-p)}{V(1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ n)};$$

cioè:

$$\frac{V(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x_n)}{V(1\ ,\ 2,\ \ldots\ldots\ ,\ n)}.$$

7. In particolare, posto in VII, $x_i = x + (i-1)\,\delta$ si ha il determinante:

VIII
$$\begin{vmatrix} \binom{x}{p} & \binom{x+\delta}{p} \ldots\ldots \binom{x+(n-1)\,\delta}{p} \\ \binom{x}{p+1} & \binom{x+\delta}{p+1} \ldots\ldots \binom{x+(n-1)\,\delta}{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{x}{p+n-1} & \binom{x+\delta}{p+n-1} \ldots\ldots \binom{x+(n-1)\delta}{p+n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore, avendosi:

$$V(x\ ,x+\delta\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x+(n-1)\,\delta) = V(1\ ,2\ ,\ldots\ldots\ ,\ n)\,\delta^{\binom{n}{2}}$$

risulta:

$$\frac{\binom{x_1}{p}\ \binom{x_2}{p}\cdots\cdots\binom{x_n}{p}}{\binom{p}{p}\ \binom{p+1}{p}\cdots\cdots\binom{p+n-1}{p}}\ \delta^{\binom{n}{2}}$$

8. Facendo in VIII, $\delta = 1$, si ha il seguente determinante considerato da Zeipel: [1])

$$\text{IX}\qquad \begin{vmatrix} \binom{x}{p} & \binom{x+1}{p} & \cdots\cdots & \binom{x+n-1}{p} \\ \binom{x}{p+1} & \binom{x+1}{p+1} & \cdots\cdots & \binom{x+n-1}{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x}{p+n-1} & \binom{x+1}{p+n-1} & \cdots\cdots & \binom{x+n-1}{p+n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore risulta:

$$\frac{\binom{x}{p}\ \binom{x+1}{p}\cdots\cdots\binom{x+n-1}{p}}{\binom{p}{p}\ \binom{p+1}{p}\cdots\cdots\binom{p+n-1}{p}}$$

ovvero, secondo Zeipel:

$$\frac{\binom{x+n-1}{n}\ \binom{x+n-2}{n}\cdots\cdots\binom{x+n-p}{n}}{\binom{p+n-1}{n}\ \binom{p+n-2}{n}\cdots\cdots\binom{n}{n}}$$

9. Nel determinante IX di Zeipel si sottragga dalla 2ª colonna la 1ª, dalla 3ª la 2ª .... dall'ultima la penultima.

Poi nel determinante ottenuto si sottragga dalla 3ª colonna la 2ª, dalla 4ª la 3ª, ... dall'ultima la penultima, e così si continui fino ad ottenere il seguente determinante formato coi coefficienti binomiali dalla medesima base:

---

[1]) Zeipel. *Om Determinanter*, ecc. Lunds Univ. Ats. Skrift för ar 1865.

X
$$\begin{vmatrix} \binom{x}{p} & \binom{x}{p-1} & \cdots & \binom{x}{p-n+1} \\ \binom{x}{p+1} & \binom{x}{p} & \cdots & \binom{x}{p-n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x}{p+n-1} & \binom{x}{p+n-2} & \cdots & \binom{x}{p} \end{vmatrix}$$

il cui valore è quindi:

$$\frac{\binom{x}{p}\binom{x+1}{p}\cdots\binom{x+n-1}{p}}{\binom{p}{p}\binom{p+1}{p}\cdots\binom{p+n-1}{p}}$$

10. Facendo in X, $p=1$, si ha il seguente determinante considerato da Studnicka [5]).

XI
$$\begin{vmatrix} \binom{x}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{x}{2} & \binom{x}{1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x}{n} & \binom{x}{n-1} & \binom{x}{n-2} & \cdots & \binom{x}{1} \end{vmatrix}$$

che vale quindi:

$$\binom{x+n-1}{n}$$

11. Il determinante:

XII
$$\begin{vmatrix} \binom{x_1+y_1}{l} & \binom{x_1+y_2}{l} & \cdots & \binom{x_1+y_n}{l} \\ \binom{x_2+y_1}{l} & \binom{x_2+y_2}{l} & \cdots & \binom{x_2+y_n}{l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x_n+y_1}{l} & \binom{x_n+y_2}{l} & \cdots & \binom{x_n+y_n}{l} \end{vmatrix}$$

è nullo se $l < n-1$, mentre se $l = n-1$ vale:

---

[5]) Studnicka. Bohm. Gesell. d. Wiss. 1879.

$$(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{V(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\, V(y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)}{V^2(1, 2, \ldots\ldots n)};$$

ovvero (n. 4):

$$(-1)^{\binom{n}{2}} St(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)\, St(y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$$

Ed invero, per la nota formola di addizione di Eulero:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{x}{i} \binom{y}{n-i}$$

il determinante XII è uguale al prodotto (per righe):

$$\begin{vmatrix} \binom{x_1}{0} & \binom{x_1}{1} \ldots\ldots \binom{x_1}{l} \\ \binom{x_2}{0} & \binom{x_2}{0} \ldots\ldots \binom{x_2}{l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{x_n}{0} & \binom{x_n}{1} \ldots\ldots \binom{x_n}{l} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \binom{y_1}{l} & \binom{y_1}{l-1} \ldots\ldots \binom{y_1}{0} \\ \binom{y_2}{l} & \binom{y_2}{l-1} \ldots\ldots \binom{y_2}{0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{y_n}{l} & \binom{y_n}{l-1} \ldots\ldots \binom{y_n}{0} \end{vmatrix}$$

Ora, se $l < n-1$, il numero delle righe supera quello delle colonne e l'ultimo prodotto è nullo.

Se poi è $l = n-1$, si osservi che il 1° determinante, (quello delle x) è del tipo di Stern, riducendosi precisamente alla forma IV cambiando le righe in colonne; quanto al 2° determinante (quello delle y), si riduce al tipo di Stern, rovesciando l'ordine delle colonne, il che importa $\binom{n}{2}$ scambi fra colonne consecutive.

Riesce quindi chiaro che il valore di XI è quello anzi dato.

12. Ponendo nel determinante XII, $-y_i$ al posto di y_i e $l = n-1$ si ha il determinante:

XIII
$$\begin{vmatrix} \binom{x_1-y_1}{n-1} & \binom{x_1-y_2}{n-1} \ldots\ldots \binom{x_1-y_n}{n-1} \\ \binom{x_2-y_1}{n-1} & \binom{x_2-y_2}{n-1} \ldots\ldots \binom{x_2-y_n}{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{x_n-y_1}{n-1} & \binom{x_n-y_2}{n-1} \ldots\ldots \binom{x_n-y_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore, per essere $V(-y_1, -y_2, \ldots, -y_n) = (-1)^{\binom{n}{2}} V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, risulta:

$$\frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, V(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{V^2(1, 2, \ldots, n)}$$

ovvero (n. 4):

$$St(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, St(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

13. Facendo in XII, $y_i = x_i$, e $l = n - 1$ si ha il determinante simmetrico:

XIV
$$\begin{vmatrix} \binom{2x_1}{n-1} & \binom{x_1+x_2}{n-1} & \ldots & \binom{x_1+x_n}{n-1} \\ \binom{x_2+x_1}{n-1} & \binom{2x_2}{n-1} & \ldots & \binom{x_2+x_n}{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{x_n+x_1}{n-1} & \binom{x_n+x_2}{n-1} & \ldots & \binom{2x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore risulta:

$$(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{V^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{V^2(1, 2, \ldots, n)};$$

ovvero (n. 4):

$$(-1)^{\binom{n}{2}} St^2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si noti che il determinante XIV differisce dal determinante delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, per un fattore numerico.

14. Facendo in XII, $y_i = x_i$, si ha il determinante;

XV
$$\begin{vmatrix} 0 & \binom{x_1-x_2}{n-1} & \ldots & \binom{x_1-x_n}{n-1} \\ \binom{x_2-x_1}{n-1} & 0 & \ldots & \binom{x_2-x_n}{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{x_n-x_1}{n-1} & \binom{x_n-x_2}{n-1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

il cui valore risulta:

$$\frac{V^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{V^2(1, 2, \ldots, n)};$$

ovvero (n. 4):

$$St^2\, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Anche questo determinante differisce per un fattore numerico dal determinante delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

15. Facendo in XII $l = n-1$ e $y_i = (i-1)\,\delta$ si ha il seguente determinante considerato da F. Sibirani [6]):

$$\text{XVI} \qquad \begin{vmatrix} \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_1+\delta}{n-1} & \ldots & \binom{x_1+(n-1)\delta}{n-1} \\ \binom{x_2}{n-1} & \binom{x_2+\delta}{n-1} & \ldots & \binom{x_n+(n-1)\delta}{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{x_n}{n-1} & \binom{x_n+\delta}{n-1} & \ldots & \binom{x_n+(n-1)\delta}{n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore risulta:

$$(-\delta)^{\binom{n}{2}} \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{V(1, 2, \ldots, n)};$$

ovvero (n. 4):

$$(-\delta)^{\binom{n}{2}} St(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

16. Facendo in XVI, $x_n = 0$, $\delta = 1$ e sviluppando secondo gli elementi dell'ultima riga, si ha il seguente determinante pure considerato da F. Sibirani [7]):

[6]) F. Sibirani, *Boll. Matem. di* A. Conti (Firenze). Ann. 1.ª della 3.ª serie (1939) pag. 84.

[7]) F. Sibirani, *Boll. Mat. di* A. Conti (Firenze). Ann. 1.ª della 3.ª serie (1939) p. 86.

XVII
$$\begin{vmatrix} \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_1+1}{n-1} & \cdots & \binom{x_1+n-2}{n-1} \\ \binom{x_2}{n-1} & \binom{x_2+1}{n-1} & \cdots & \binom{x_2+n-2}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x_{n-1}}{n-1} & \binom{x_{n-1}+1}{n-1} & \cdots & \binom{x_{n-1}+n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore risulta:

$$(-1)^{\binom{n-1}{2}} \frac{x_1 \cdot x_2, \ldots, x_{n-1}}{(n-1)!} \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{V(1, 2, \ldots, n-1)};$$

ovvero (n. 4):

$$(-1)^{\binom{n-1}{2}} \frac{x_1 \cdot x_2, \ldots, x_{n-1}}{(n-1)!} St(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

17. Un determinante più generale di XVII si ottiene trasformando opportunamente il determinante VII.

Giusta la formola di addizione di Eulero, si ha:

$$\binom{r+t}{s+t} = \binom{r}{s} + \binom{r}{s+1}\binom{t}{1} + \binom{r}{s+2}\binom{t}{2} + \cdots + \binom{r}{s+t-1}\binom{t}{t-1} + \binom{r}{s+t}\binom{t}{t}$$

Ne segue che se nel determinante VII si aggiunge alla riga i^a ($i=1, 2 \ldots . n-1$) la $(i+1)^a$ moltiplicata per $\binom{n-i}{1}$ la $(i+2)^a$ moltiplicata per $\binom{n-i}{2}$ ..... l'ultima moltiplicata per $\binom{n-i}{n-i}$, si ottiene il determinante:

$$\begin{vmatrix} \binom{x_1+n-1}{p+n-1} & \binom{x_2+n-1}{p+n-1} & \cdots & \binom{x_n+n-1}{p+n-1} \\ \binom{x_1+n-2}{p+n-1} & \binom{x_2+n-2}{p+n-1} & \cdots & \binom{x_n+n-2}{p+n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x_1}{p+n-1} & \binom{x_2}{p+n-1} & \cdots & \binom{x_n}{p+n-1} \end{vmatrix}$$

Rovesciando in questo determinante l'ordinamento delle righe, il che importa $\binom{n}{2}$ cambiamenti di ordine su righe consecutive, si ha il determinante:

XVIII
$$\begin{vmatrix} \binom{x_1}{p+n-1} & \binom{x_2}{p+n-1} & \cdots & \binom{x_n}{p+n-1} \\ \binom{x_1+1}{p+n-1} & \binom{x_2+1}{p+n-1} & \cdots & \binom{x_n+1}{p+n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{x_1+n-1}{p+n-1} & \binom{x_2+n-1}{p+n-1} & \cdots & \binom{x_n+n-1}{p+n-1} \end{vmatrix}$$

il cui valore è quindi:

$$(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{\binom{x_1}{p}\binom{x_2}{p}\cdots\binom{x_n}{p}}{\binom{p}{p}\binom{p+1}{p}\cdots\binom{p+n-1}{p}} \frac{V(x_1 x_2 \ldots x_n)}{V(1,2,\ldots n)};$$

ovvero (n. 4):

$$(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{\binom{x_1}{p}\binom{x_2}{p}\cdots\binom{x_n}{p}}{\binom{p}{p}\binom{p+1}{p}\cdots\binom{p+n-1}{p}} St(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

§ 2. — *Determinanti dipendenti da uno o più parametri e che per valori particolari di essi si riducono al tipo di* VANDERMONDE.

18. Il determinante:

XIX
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^m \ldots & x_1^{p_1+p_2-1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}x_1 \ldots & \binom{m}{1}x_1^{m-1} \ldots & \binom{p_1+p_2-1}{1}x_1^{p_1+p_2-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{m}{p_1-1}x_1^{m-p_1+1} \ldots & \binom{p_1+p_2-1}{p_1-1}x_1^{p_2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots & x_2^m \ldots & x_2^{p_1+p_2-1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}x_2 \ldots & \binom{m}{1}x_2^{m-1} \ldots & \binom{p_1+p_2-1}{1}x_2^{p_1+p_2-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \binom{m}{p_2-1}x_2^{m-p_2+1} \ldots & \binom{p_1+p_2-1}{p_2-1}x_2^{p_1} \end{vmatrix}$$

vale:

(2) $$(x_2 - x_1)^{p_1 p_2}$$

Per la dimostrazione, ci serviremo delle due seguenti identità:

$a)$ $$\binom{m}{i} x_2^{m-i} - \sum_{h=0}^{p-1-i} \binom{m}{i+h}\binom{i+h}{i} x_1^{m-i-h}\left(x_2-x_1\right)^h =$$

$$= (x_2-x_1)^{p-i} \sum_{h=0}^{m-p} \binom{m}{p+h}\binom{p+h}{i} x_1^{m-p-h}(x_2-x_1)^h$$

$b)$ $$\sum_{\lambda=0}^{i} \binom{p+h}{i-\lambda}\binom{-p}{\lambda} = \binom{h}{i}$$

Poichè la $b)$ si giustifica subito con la formola di addizione di Eulero, stabiliamo la $a)$.

Avendosi:

$$\binom{m}{i+h}\binom{i+h}{i} = \binom{m}{i}\binom{m-i}{h},$$

il 1° membro della $a)$ diviene:

(1) $$\binom{m}{i}\left[x_2^{m-i} - \sum_{h=0}^{p-1-i} \binom{m-i}{h} x_1^{m-i-h}(x_2-x_1)^h \right]$$

D'altra parte, se nello sviluppo di $(x_1 + y_1)^{m-i}$ si pone $x_2 - x_1$ al posto di y_1, con facili trasformazioni si ha l'identità:

$$x_2^{m-i} - \sum_{h=0}^{p-1-i}\binom{m-i}{h} x_1^{m-i-h}(x_2-x_1)^h = (x_2-x_1)^{p-i}\sum_{h=0}^{m-p}\binom{m-i}{p-i+h} x_1^{m-p-h}(x_2-x_1)^h;$$

per cui, avendosi: $\binom{m}{i}\binom{m-i}{p-i+h} = \binom{m}{p+h}\binom{p+h}{i}$, l'espressione (1) si riduce in quella a 2° membro della $a)$.

Si supponga adesso, com'è possibile, $p_1 \geq p_2$.

Sottraendo dalla $(p_1 + i + 1)^a$ riga $(i = 0, 1 \ldots . p_2 - 1)$ del determinante dato le righe $(i+1)^a$, $(i+2)^a \ldots . p_1^a$, moltiplicate rispettivamente per le espressioni 1, $\binom{i+1}{i}(x_2-x_1) \ldots . \binom{p_1-1}{i}(x_2-x_1)^{p_1-1-i}$, si ottiene un determinante avente in comune col dato le prime p_1 righe e

con gli elementi della $(p+i+1)^a$ riga $(i=0,1,\ldots,p_2-1)$ dati dall'espressione:

$$(x_2-x_1)^{p_1-i}\sum_{h=0}^{m-p_1}\binom{m}{p_1+h}\binom{p_1+h}{i}x_1^{m-p_1-h}(x_2-x_1)^h,$$

al variare di m da o a p_1+p_2-1.

Ciò si deduce dalla $(m+1)^a$ colonna del determinante dato, in base all'identità a).

Ne segue:

$$D=(x_2-x_1)^{p_1p_2-\binom{p_2}{2}}D_1, \tag{2}$$

essendo D il determinante dato e D_1 il determinante avente in comune con D le prime p_1 righe e di cui gli elementi della $(p_1+i+1)^a$ riga $(i=0,1\ldots.p_2-1)$ sono dati dall'espressione:

$$\sum_{h=0}^{m-p_1}\binom{m}{p_1+h}\binom{p_1+h}{i}x_1^{m-p_1-h}(x_2-x_1)^h, \tag{3}$$

al variare di m da o a p_1+p_2-1.

Ora aggiungendo alla $(p_1+i+1)^a$ riga $(i=1,2\ldots.p_2-1)$ di D_1 le righe $(p_1+1)^a,(p_1+2)^a\ldots.(p_1+i)^a$, moltiplicate rispettivamente per $\binom{-p_1}{i},\binom{-p_1}{i-1}\ldots.\binom{-p_1}{1}$, si ottiene un determinante ovente in comune con D_1 le prime p_1+1 righe e con gli elementi della $(p_1+i+1)^a$ riga $(i=1,2\ldots.p_2-1)$ dati dall'espressione:

$$(x_2-x_1)^i\sum_{h=0}^{m-p_1-i}\binom{m}{p_1+i+h}\binom{i+h}{i}x_1^{m-p_1-i-h}(x_2-x_1)^h,$$

al variare di m da o a p_1+p_2-1.

Ciò si deduce dalla (3) tenendo presente l'identità b) e osservando che si ha $\binom{h}{i}=0$ per $h=0,1\ldots i-1$.

Ne segue:

$$D_1=(x_2-x_1)^{\binom{p_2}{2}}D_2, \tag{4}$$

essendo D_2 il determinante avente in comune con D_1 le prime p_1+1 righe e di cui gli elementi della $(p_2+i+1)^a$ riga $(i=1,2\ldots\ldots p_2-1)$ sono dati dall'espressione:

$$(5)\qquad \sum_{h=0}^{m-p_1-i}\binom{m}{p_1+i+h}\binom{i+h}{i}x_1^{\,m-p_1-i-h}(x_2-x_1)^h,$$

al variare di m da o a p_1+p_2-1.

Dalle (2) e (4) si ha;

$$D=(x_2-x_1)^{p_1p_2}\,D_2$$

Infine, se nella (5) si fa variare m da o a p_1+i, se nella (3) si fa $i=1$ e si fa variare m da o a p_1, tenendo presente che D_2 ha in comune con D le prime p_1 righe, risulta che D_2 vale 1, per avere uguali a 1 tutti gli elementi della diagonale principale e uguali a o tutti gli elementi al disotto di questa.

Si conclude:

$$D=(x_2-x_1)^{p_1p_2}$$

19. Un determinante più generale di XIX è il seguente:

XX

$$\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x_1^{m-1}\\
0 & 1 & \binom{2}{1}x_1 \ldots\ldots\ldots & \binom{m-1}{1}x_1^{m-2}\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
0 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots & \binom{m-1}{p_1-1}x_2^{m-p_1}\\
1 & x_2 & x_2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x_2^{m-1}\\
0 & 1 & \binom{2}{1}x_2 \ldots\ldots\ldots & \binom{m-1}{1}x_2^{m-2}\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
0 & 0 & 0 & \binom{m-1}{p_2-1}x_2^{m-p_2}\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
1 & x_n & x_n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x_n^{m-1}\\
0 & 1 & \binom{2}{1}x_n \ldots\ldots\ldots & \binom{m-1}{1}x_n^{m-2}\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
0 & 0 & 0 & \binom{m-1}{p_{n-1}}x_n^{m-p_n}
\end{vmatrix}$$

dove $p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n=m$.

Il valore di questo determinante è:

$$\prod_{j=i+1}^{n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_j - x_i)^{p_j p_i}$$

Prima di dimostrare questo risultato, diamo del determinante XX uno sviluppo la cui considerazione ci sarà utile anche nei numeri seguenti: Indichi M_i la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{m-1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} x_i & \dots & \binom{m-1}{1} x_i^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{m-1}{p_i-1} x_i^{m-p_i} \end{matrix} \right\|$$

La matrice del determinante XX è formata in modo evidente con le matrici $M_1, M_2 \dots M_n$.

Ora, se $D(i_1, i_2, \dots i_{p_i})$ è il minore di XX di ordine p_i formato con le righe della matrice M_i, di posto $i_1+1, i_2+1, \dots, i_{p_i}+1$, con la regola di LAPLACE si ha per il determinante XX il seguente sviluppo:

$$\sum \pm D(1_1, 1_2, \dots, 1_{p_1}) D(2_1, 2_2, \dots, 2_{p_2}) \dots D(n_1, n_2, \dots, n_{p_n})$$

dove $1_1, 1_2 \dots 1_{p_1} 2_1 \dots 2_{p_2} \dots n_1 \dots n_{p_n}$ è una permutazione degli elementi $0, 1, 2, \dots, m-1$; dove il sommatorio è esteso nel modo voluto dalla regola di LAPLACE e i segni sono determinati con la stessa regola.

Si riconosce peraltro facilmente che si ha:

$$D(i_1, i_2, \dots, i_{p_i}) = St(i_1, i_2, \dots i_{p_i})\, x_i^{\,i_1+i_2+\dots+i_{p_i}-\binom{p_i}{2}}$$

essendo $St(i_1 i_2 \dots i_{p_i})$ il determinante di STERN formato coi numeri $i_1, i_2 \dots i_{p_i}$ (n. 4).

Lo sviluppo precedente di XX perciò diviene:

$$(1) \qquad \sum \pm St(1_1, 1_2 \dots 1_{p_1})\, St(2_1, 2_2 \dots 2_{p_2}) \dots St(n_1, n_2 \dots n_{p_n}) \times$$

$$\times x_1^{1_2+1_3+\dots+1_{p_1}-\binom{p_1}{2}} x_2^{2_1+2_2+\dots+2_{p_2}-\binom{p_2}{2}} \dots x_n^{n_1+n_2+\dots+n_{p_n}-\binom{p_n}{2}}$$

Dallo sviluppo (1) si traggono le seguenti conseguenze:

a) Il determinante XX (che evidentemente è una funzione simmetrica o alternante) è funzione intera omogenea delle variabili $x_1, x_2 \dots x_n$, di grado $\sum_{j=i+1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} p_j p_i$ in queste variabili.

Basta, infatti, osservare che si ha:

$$1_1+1_2+\dots+1_{p_1}+2_1+2_2+\dots+2_{p_2}+\dots+n_1+n_2+\dots+n_{p_n} =$$

$$= 0+1+2+\dots+m-1=\binom{m}{2}=\binom{p_1+p_2+\dots+p_n}{2},$$

e tener conto dell'identità:

$$\binom{p_1+p_2+\dots+p_n}{2}-\binom{p_1}{2}-\binom{p_2}{2}-\dots-\binom{p_n}{2}=\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1} p_j p_i$$

b) Se alle basi dei coefficienti binomiali che figurano in ciascuna riga del determinante XX si aggiunge una medesima quantità, anche variabile da riga a riga, il valore del determinante XX non si altera.

Ciò discende invero dallo sviluppo (1) di XX e dall'analoga proprietà dei determinanti di Stern, di cui al n. 5 *b*).

Indichiamo adesso con D_n il determinante XX.

Con lo stesso procedimento adoperato per il determinante XIX, si prova che D_n è divisibile per $(x_2-x_1)^{p_2 p_1}$, e poichè D_n è una funzione alternante o simmetrica, D_n è quindi divisibile per $\prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=1}^{1}(x_j-x_i)^{p_j p_i}$; e poichè il grado di questa funzione è evidentemente quello trovato in *a*) per D_n, con una costante appropriata K_n, risulta:

$$D_n = K_n \prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(x_j-x_i)^{p_j p_i} \tag{2}$$

Resta da provare che è $K_n=1$.

A questo fine si osservi che la somma S di tutti i termini dello sviluppo di D_n, non contenenti x_1 è data, giusta la (2), da:

$$S = K_n x_2^{p_1 p_2} x_3^{p_1 p_3} \dots\dots x_n^{p_1 p_n} \prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=2}^{n-1}(x_j-x_i)^{p_j p_i} \tag{3}$$

D'altra parte, tale somma si può ottenere moltiplicando il minore principale di D_n contenuto nelle prime p_1 righe e nelle prime p_1 colonne, per il minore complementare.

Tenendo conto della proprietà *b*) si ha in questo modo:

$$S = x_2^{p_1 p_2}\, x_3^{p_1 p_3} \ldots\ldots x_n^{p_1 p_n}\, D_{n-1},$$

se D_{n-1} è il determinante analogo a D_n formato con le quantità $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n$. Ma per la (2) l'ultima uguaglianza diviene:

$$(4) \qquad S = K_{n-1}\, x_2^{p_1 p_2}\, x_3^{p_1 p_3} \ldots\ldots x_n^{p_1 p_n} \prod_{j=i+1}^{n} \prod_{i=2}^{n-1} (x_j - x_i)^{p_j p_i}$$

Confrontando le (3) e (4) si deduce:

$$K_n = K_{n-1}.$$

E poichè (n. 18) è $K_{2=1}$, si ha infine $K_{n=1}$ e si conclude:

$$D_n = \prod_{j=i+1}^{n} \prod_{i=2}^{n-1} (x_j - x_i)^{p_j p_i}.$$

20. — In particolare, dal determinante XX si ha:

a) per $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = 1$, il determinante di VANDERMONDE formato con le quantità $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$;

b) per $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = 2$, il determinante di BESSO (in altra forma) di cui all'*Introduzione*;

c) per $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = p$, un determinante il cui valore risulta:

$$V_p^2\,(x_1\, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

21. Si consideri il seguente determinante, più generale di XX:

$$\text{XXI}\qquad \begin{vmatrix}
\binom{a_{111}}{0}x_1^{0} & \binom{a_{112}}{0}x_1^{1} & \cdots & \binom{a_{11m}}{0}x_1^{m-1} \\
\binom{a_{121}}{1}x_1^{-1} & \binom{a_{122}}{1}x_1^{0} & \cdots & \binom{a_{12m}}{1}x_1^{m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a_{1p_11}}{p_1-1}x_1^{-(p_1-1)} & \binom{a_{1p_12}}{p_1-1}x_1^{-(p_1-2)} & \cdots & \binom{a_{1p_1m}}{p_1-1}x_1^{m-p_1} \\
\binom{a_{211}}{0}x_2^{0} & \binom{a_{212}}{0}x_2^{1} & \cdots & \binom{a_{21m}}{0}x_2^{m-1} \\
\binom{a_{221}}{1}x_2^{-1} & \binom{a_{222}}{1}x_2^{0} & \cdots & \binom{a_{22m}}{1}x_2^{m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a_{2p_21}}{p_2-1}x_2^{-(p_2-1)} & \binom{a_{2p_22}}{p_2-1}x_2^{-(p_2-2)} & \cdots & \binom{a_{2p_2m}}{p_2-1}x_2^{m-p_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a_{n11}}{0}x_n^{0} & \binom{a_{n12}}{0}x_2^{1} & \cdots & \binom{a_{n1m}}{0}x_2^{m-1} \\
\binom{a_{n21}}{1}x_n^{-1} & \binom{a_{n22}}{1}x_2^{0} & \cdots & \binom{a_{n2m}}{1}x_2^{m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a_{np_n1}}{p_n-1}x_n^{-(p_n-1)} & \binom{a_{np_n2}}{p_n-1}x_n^{-(p_n-2)} & \cdots & \binom{a_{np_nm}}{p_n-1}x_n^{m-p_n}
\end{vmatrix}$$

dove $p_1+p_2+\cdots+p_n=m$; $a_{ghk}=a_{gh}+(k-1)\,\delta$, e quindi tutte le a di ciascuna riga descrivono una progressione aritmetica di ragione δ, col 1° termine variabile da riga a riga.

Proveremo che il valore di questo determinante è:

$$\delta^{\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+\cdots+\binom{p_n}{2}} \prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(x_j-x_i)^{p_j p_i}$$

A questo fine, indichi M_i^1 la matrice:

$$\left\|\begin{matrix}
\binom{a_{i11}}{0}x_i^{0} & \binom{a_{i12}}{0}x_i^{1} & \cdots & \binom{a_{i1m}}{0}x_i^{m-1} \\
\binom{a_{i21}}{1}x_i^{-1} & \binom{a_{i22}}{1}x_i^{0} & \cdots & \binom{a_{i2m}}{1}x_i^{m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a_{ip_i1}}{p_i-1}x_i^{-(p_i-1)} & \binom{a_{ip_i2}}{p_i-1}x_i^{-(p_i-2)} & \cdots & \binom{a_{ip_im}}{p_i-1}x^{m-p_i}
\end{matrix}\right\|$$

La matrice del determinante XXI è formata in modo evidente con le matrici $M_1^1\ M_2^1\ \ldots\ldots\ M_n^1$.

Indichi $D^1(i_1\ i_2\ \ldots\ldots\ i_{pi})$ il minore di XXI formato con le righe della matrice M_i^1, di posto $i_1+1,\ i_2+1,\ \ldots\ i_{pi}+1$.

Si ha facilmente:

$$D^1(i_1\ i_2 \ldots . i\ p)=\begin{vmatrix} \binom{a_{i1\ i1}}{0} & \binom{a_{i1\ i2}}{0} \ldots\ldots \binom{a_{i1\ ipi}}{0} \\ \binom{a_{i2\ i1}}{1} & \binom{a_{i2\ i2}}{1} \ldots\ldots \binom{a_{i2\ ipi}}{1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{a_{i\ pi\ i1}}{p_i-1} & \binom{a_{i\ pi\ i2}}{p_i-1} \quad \binom{a_{i\ pi\ ipi}}{p_i-1} \end{vmatrix} x_i^{\,i_1+i_2+\ldots+i_{pi}-\binom{p_i}{2}}$$

Ora, il determinante a 2° membro di quest'ultima uguaglianza è del tipo VI considerato al n. 5, e il suo valore è quindi:

$$\delta^{\binom{pi}{2}}\ St\ (i_1\ i_2\ \ldots\ldots\ i_p i^2)$$

Sviluppando quindi il determinante XXI con la regola di LAPLACE e con procedimento analogo a quello tenuto per lo sviluppo (1) relativo al determinante XX se si indica con D_n^1 il determinante XXI e con D_n il XX, tenendo conto dello sviluppo (1) si ha:

$$D'_n = \delta^{\binom{p1}{2}+\binom{p2}{2}+\ldots\ldots+\binom{pn}{2}} D_n$$

e quindi:

$$D_n' = \delta^{\binom{p1}{2}+\binom{p2}{2}+\ldots\ldots+\binom{pn}{2}} \prod_{j=i+1}^{n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_j - x_{i\,i}^{pj\ pi}$$

22. — Si consideri infine il determinante:

$$\text{XXII}\quad \begin{vmatrix}
\binom{a}{t}x_1^{\,0} & \binom{a+\delta}{t}x_1^{\,1} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t}x_1^{\,m-1} \\
\binom{a}{t+1}x_1^{\,-1} & \binom{a+\delta}{t+1}x_1^{\,0} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+1}x_1^{\,m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a}{t+p_1-1}x_1^{\,-(p_1-1)} & \binom{a+\delta}{t+p_1-1}x_1^{\,-(p_1-2)} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+p_1-1}x_1^{\,m-p_1} \\
\binom{a}{t}x_2^{\,0} & \binom{a+\delta}{t}x_2^{\,1} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t}x_2^{\,m-1} \\
\binom{a}{t+1}x_2^{\,-1} & \binom{a+\delta}{t+1}x_2^{\,0} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+1}x_2^{\,m-p_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a}{t+p_2-1}x_2^{\,-(p_2-1)} & \binom{a+\delta}{t+p_2-1}x_2^{\,-(p_2-2)} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+p_2-1}x_2^{\,m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a}{t}x_n^{\,0} & \binom{a+\delta}{t}x_n^{\,1} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t}x_n^{\,m-1} \\
\binom{a}{t+1}x_n^{\,-1} & \binom{a+\delta}{t+1}x_n^{\,0} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+1}x_n^{\,m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a}{t+p_n-1}x_n^{\,-(p_n-1)} & \binom{a+\delta}{t+p_n-1}x_n^{\,-(p_n-2)} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+p_n-1}x_n^{\,m-p_n}
\end{vmatrix}$$

dove $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=m$.

Proveremo che il suo valore è:

$$\frac{\binom{a}{t}\binom{a+\delta}{t}\cdots\cdots\binom{a+(m-1)\delta}{t}\delta^{\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+\cdots\cdots+\binom{p_n}{2}}\prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(x_j-x_i)^{p_jp_i}}{\prod_{i=0}^{p_1-1}\binom{t+i}{t}\prod_{i=0}^{p_2-1}\binom{t+i}{t}\cdots\cdots\prod_{i=0}^{p_n-1}\binom{t+i}{t}}$$

Indichi infatti, M_i'' la matrice:

$$\begin{vmatrix}
\binom{a}{t}x_i^{\,0} & \binom{a+\delta}{t}x_i^{\,1} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t}x_i^{\,m-1} \\
\binom{a}{t+1}x_i^{\,-1} & \binom{a+\delta}{t+1}x_i^{\,0} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+1}x_i^{\,m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{a}{t+p_i-1}x_i^{\,-(p_i-1)} & \binom{a+\delta}{t+p_i-1}x_i^{\,-(p_i-2)} & \cdots & \binom{a+(m-1)\delta}{t+p_i-1}x_i^{\,m-p_i}
\end{vmatrix}$$

La matrice del determinante XXII è formata in modo evidente con le matrici $M_1'' M_2'' \ldots\ldots M_n''$.

Indichi $D''(i_1 ; i_2 \ldots\ldots i_{p_i})$ il minore di XXII formato con le righe di M_i'', di posto $i_1+1, i_2+1, \ldots\ldots i_{p_i}+1$.

Si ha facilmente:

$$D''(i_1 i_2 \ldots\ldots i_{p_i}) = \begin{vmatrix} \binom{a+i_1\delta}{t} & \binom{a+i_2\delta}{t} & \ldots\ldots & \binom{a+i_{p_i}\delta}{t} \\ \binom{a+i_1\delta}{t+1} & \binom{a+i_2\delta}{t+1} & \ldots\ldots & \binom{a+i_{p_i}\delta}{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{a+i_1\delta}{t+p_{i-1}} & \binom{a+i_2\delta}{t+p_{i-1}} & \ldots\ldots & \binom{a+i_{p_i}\delta}{t+p_{i-1}} \end{vmatrix}_{x_i}^{i_1+i_2+\ldots\ldots+i_{p_i}-\binom{p_i}{2}}$$

Ora, il determinante a 2° membro di quest'ultima uguaglianza è del tipo VII considerato al n. 6, e il suo valore è quindi:

$$\frac{\binom{a+i_1\delta}{t}\binom{a+i_2\delta}{t}\ldots\ldots\binom{a+i_{p_i}\delta}{t}}{\binom{t}{t}\binom{t+1}{t}\ldots\ldots\binom{t+p_i-1}{t}}\delta^{\binom{p_i}{2}} St(i_1, i_2, \ldots\ldots, i_{p_i})$$

Sviluppando quindi il determinante XXII con la regola di Laplace, e con procedimento analogo a quello tenuto per lo sviluppo (1) relativo al determinante XX, se si indica con D_n'' il determinante XXII e con D_n il determinante XX, tenendo conto dello sviluppo (1) si ha:

$$D_n'' = \frac{\binom{a}{t}\binom{a+\delta}{t}\ldots\ldots\binom{a+(m-1)\delta}{t}}{\prod_{i=0}^{p_1-1}\binom{t+i}{t}\prod_{i=0}^{p_2-1}\binom{t+i}{t}\ldots\ldots\prod_{i=0}^{p_n-1}\binom{t+i}{t}}\delta^{\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+\ldots\ldots+\binom{p_n}{2}} D_n$$

e quindi:

$$D_n'' = \frac{\binom{a}{t}\binom{a+\delta}{t}\ldots\ldots\binom{a+(m-1)\delta}{t}}{\prod_{i=0}^{p_1-1}\binom{t+i}{t}\prod_{i=0}^{p_2-1}\binom{t+i}{t}\ldots\ldots\prod_{i=0}^{p_n-1}\binom{t+i}{t}}\delta^{\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+\ldots\ldots+\binom{p_n}{2}}\prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(x_j-y_i)^{p_i p_j}$$

§ 3. — *Altre estensioni del determinante di* VANDERMONDE.

23. — Il determinante:

XXIII

$$\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-1} \\
0 & 1 & 2x_1 \ldots\ldots D_x x_1^{m-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots\ldots D_x^{p_1-1} x_1^{m-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 \ldots\ldots x_2^{m-1} \\
0 & 1 & 2x_2 \ldots\ldots D_x x_2^{m-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots\ldots D_x^{p_2-1} x_2^{m-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
1 & x_n & x_n^2 \ldots\ldots x_n^{m-1} \\
0 & 1 & 2x_n \ldots\ldots D_x x_n^{m-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots\ldots D_x^{p_n-1} x_n^{m-1}
\end{vmatrix}$$

dove $p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n=m$ e $D_x^i\ x_i^h$ esprime il valore di $D_x^i\ x^h$ nel punto x_i, vale:

$$V(1,2\ldots\ldots p_1)\ V(1,2\ldots\ldots p_2)\ldots\ldots V(1,2\ldots\ldots p_n)\ \prod_{j=i+1}^{n}\ \prod_{i=1}^{n-1}(x_j-x_i)^{p_j\,p_i}$$

(Si suppone $V(1,2\ldots\ldots p_i)=1$, per $p_i=1$).

Basta, invero, osservare che il determinante XXIII si ottiene da XX moltiplicando la 2ª riga per 1! la 3ª per 2! .... la p_1^{a} per $(p_1-1)!$, la $p+2)^{a}$ per 1!, la $(p_1+3)^{a}$ per 2! .... la $(p_1+p_2)^{a}$ per $(p_2-1)'$ e così via, e che si ha: $1!\,2!\ldots\ldots(p_i-1)!=V(1,2\ldots\ldots p_i)$.

24. — In particolare, dal determinante XXIII si ha:

a) per $p_1=p_2=\ldots\ldots=p_n=1$, il determinante di VANDERMONDE formato con le quantità $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$;

b) per $p_1=p_2=\ldots\ldots p_n=2$, il determinante di BESSO (in altra forma);

c) per $p_1=p_2=\ldots\ldots=p_n=p$ un determinante il cui valore risulta:

$$V^n(1,2,\ldots\ldots p)\ V^{p^2}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n).$$

25. — Il determinante:

$$\text{XXIV}\qquad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \dots\dots\dots f_m(x_1) \\ D_x f_1(x_1) & D_x f_2(x_1) \dots\dots\dots D_x f_m(x_1) \\ \dots & \dots \\ D_x^{p_1-1} f_1(x_1) & D_x^{p_1-1} f_2(x_1) \dots\dots D_x^{p_1-1} f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \dots\dots\dots f_m(x_2) \\ D_x f_1(x_2) & D_x f_2(x_2) \dots\dots\dots D_x f_m(x_2) \\ \dots & \dots \\ D_x^{p_2-1} f_1(x_2) & D_x^{p_2-1} f_2(x_2) \dots\dots D_x^{p_2-1} f_m(x_2) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) \dots\dots\dots f_m(x_n) \\ D_x f_1(x_n) & D_x f_2(x_n) \dots\dots\dots D_x f_m(x_n) \\ \dots & \dots \\ D_x^{p_n-1} f_1(x_n) & D_x^{p_n-1} f_2(x_n) \dots\dots D_x^{p_n-1} f_m(x_n) \end{vmatrix}$$

dove

$$f_h(x)=C_{h1}+C_{h2}x+\dots+C_{hm}x^{m-1},\ (h=1,2,\dots,m)\ ;\ p_1+p_2+\dots,+p_n=m,$$

vale:

$$|\,C_{ij}\,|\ V(1,2\dots p_1)\ V(1,2,\dots p_2)\dots V(1,2,p_n)\ \prod_{i=i+1}^{n}\ \prod_{i=1}^{n-1}\ (x_j-x_i)^{p_j p_i}$$

dove $|\,C_{ij}\,|$ è il determinante di tutte le C:

(Si suppone $V(1,2,\dots p_i)=1$, per $p_i=1$).

Ed invero. poichè si ha:

$$D_x^l f_h(x)=C_{h1}\,D_x^l 1+C_{h2}\,D_x^l x+\dots+C_{hm}\,D_x^l x^{m-1}(l=0,1\dots,p_i-1)$$

si riconosce che il determinante XXIV è prodotto del determinante XXIII per il determinante di tutte le C.

26. — In particolare, dal determinante XXIV si ha:

a) per $p_1=p_2=\dots=p_n=1$, il determinante I considerato nella 1ª parte;

b) per $p_1=p_2=\dots=p_n=p$, un determinante il cui valore risulta:

$$|\,C_{ij}\,|\ V^{n}(1,2,\dots p)\ V^{p^2}(x_1 x_2,\dots x_n).$$

A tale determinante può ridursi quello dell'ANDREOLI considerato nel l' *Introduzione*.

27. — Il determinante:

$$\text{XXV}\qquad \begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_{m-1}(x_1) \\ 0 & C_{11} & \dots & D_x f_{m-1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_x^{p_1-1} f_{m-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & \dots & f_{m-1}(x_2) \\ 0 & C_{11} & \dots & D_x f_{m-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_x^{p_2-1} f_{m-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_{m-1}(x_n) \\ 0 & C_{11} & \dots & D_x f_{m-1}(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_x^{p_n-1} f_{m-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

dove

$$f_h(x) = C_{h0} + C_{h1}\,x + \dots + C_{hh}\,x^h, \qquad (h=1,2,\dots,m-1)$$
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = m,$$

vale:

$$C_{11}\,C_{22}\dots C_{m-1,\,m-1}\,V(1,2,\dots,p_1)\,V(1,2,\dots,p_2)\dots V(1,2,\dots,p_n) \prod_{j=i+1}^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(x_j-x_i)^{p_j p_i}$$

(Si suppone $V(1,2,\dots,p_i)=1$, per $p_i=1$).

Questo risultato discende manifestamente da quello del n. 25, relativo al determinante più generale XXIII.

28. — In particolare, dal determinante XXV si ha:

a) per $p_1=p_2=\dots=p_n=1$, il determinante II (di BORKARDT) considerato nella 1ª parte;

b) per $p_1=p_2=\dots=p_n=2$, in altra forma, un determinante considerato da R. MARCOLONGO (v. Nota citata nell'*Introduzione*).

c) per $p_1=p_2=\dots=p_n=p$, un determinante il cui valore risulta:

$$C_{11}C_{22}\dots C_{m-1;\,m-1}\,V^n(1,2,\dots,p)\,V^{p^2}(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

A tale determinante può ridursi quello dell' ANDREOLI considerato nell' *Introduzione.*

29. — Sia:

$$F(x,y)=f_1(x)+y f_2(x)+ \ldots\ldots +y^{np-1}f_{np}(x)$$

con $f_h(x)=C_{h1}+C_{h2}x+ \ldots\ldots +C_{hnp}x^{np-1}$ $(h=1,2,\ldots\ldots,np)$
e si consideri il determinante di ordine np avente per matrice:

XXVI
$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots\ldots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots\ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots\ldots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

dove M_{ij} $(i,\ j=1,2,\ldots\ldots n)$ è la matrice quadrata di ordine p:

$$\begin{Vmatrix} F(x_i,y_j) & D_x F(x_i,y_j) & \ldots\ldots & D_x^{p-1}F(x_i,y_j) \\ D_y F(x_i,y_j) & D_{yx}F(x_i,y_j) & \ldots\ldots & D_y x^{p-1}F(x_i,y_j) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_y^{p-1}F(x_i,y_j) & D_y^{p-1}{}_x F(x_i,y_j) & \ldots\ldots & D_y^{y-1}{}_x^{p-1}F(x_i,y_j) \end{Vmatrix}$$

Il valore del determinante in questione è:

$$|\,C_{ij}\,|\ V^{2n}(1,2,\ldots,p)\ V^{p^2}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ V^{p^2}(y_1,y_2,\ldots,y_n).$$

Ed invero tale determinante è prodotto di due altri, di cui uno è XXIII considerato al n. 23, salvo il cambiamento delle quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con le quantità $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mentre l'altro è quello considerato al n. 26 *b*).

30. — Se nel determinante considerato al n. precedente si suppone $p=1$, si ha il determinante III (di BORCKARDT) considerato nella 1ª parte.

31. — Sia $f(x)$ una funzione razionale intera di x di grado $l \leq np-1$ e si consideri il determinante di ordine np avente per matrice:

XXVII
$$\begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots\ldots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots\ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots\ldots & M_{nn} \end{Vmatrix}$$

dove $M_{i,j}(i,j=1,2,\dots)$ è la matrice:

$$\begin{vmatrix} & f(a_i+b_j) & D_x f(a_i+b_j) \dots D_x^{p-1} f(a_i+b_j) \\ D_x & f(a_i+b_j) & D_x^2 f(a_i+b_j) \dots D_x^p \quad f(a_i+b_j) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_x^{p-1} f(a_i+b_j) & & D_x^p f(a_i+b_j) \dots D_x^{2p-1} f(a_i+b_j) \end{vmatrix}.$$

Proveremo che, se $l < np-1$, il determinante in questione è nullo, mentre, se $l = np-1$, il suo valore è:

$$(-1)^{\binom{np}{2}} [C(np-1)!]^{np} V^{2n}(1,2,\dots,p) \cdot \frac{V^{p^2}(a_1,a_2,\dots,a_n)\, V^{p^2}(b_1,b_2,\dots,b_n)}{V^2(1,2,\dots,np)}$$

dove C è il coefficiente del termine di grado massimo di $f(x)$. (Si suppone $V(1,2,\dots,p_i)=1$, per $p_i=1$).

Ed invero, si cominci con l'osservare che sussiste la formola:

$$D_x^h f(a_i+b_j) = D_x^h 1 \cdot f(a_i) + D_x^h b_j \cdot \frac{f_i'(a_i)}{1!} + \dots + D_x b_j^{np-1} \cdot \frac{f^{(np-1)}(a_i)}{(np-1)!}$$

dove $D_x^h b_j^r$ sta per il valore di $D_x^h x^r$ nel punto b_j.

È possibile trasformare secondo questa formola tutti gli elementi della 1ª riga del determinante dato.

In generale, se $D_x^t f(a_i+b_j)$, con $t=1,\dots,p-1$, è un elemento della m.ª riga $(m=1,2,\dots,np)$, posto:

$$D_x^t f(a_i+b_j) = D_x^{t-m} f^{(m)}(a_i+b_j) = D_x^h \varphi(a_i+b_j)$$

è possibile applicare a tale elemento la trasformazione espressa dalla formola precedente.

Dopo ciò il determinante dato appare come prodotto del determinante XXIII considerato al n. 23, salvo il cambiamento delle quantità $x_1\, x_2 \dots x_n$ nelle quantità $b_1\, b_2 \dots b_n$, per il determinante:

$$\begin{vmatrix}
f(a_1) & \frac{1}{1!}f'(a_1) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np-1)}(a_1) \\
f'(a_1) & \frac{1}{1!}f^{(2)}(a_1) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np)}(a_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
f^{(p-1)}(a_1) & \frac{1}{1!}f^{(p)}(a_1) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np+p-2)}(a_1) \\
f(a_2) & \frac{1}{1!}f'(a_2) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np-1)}(a_2) \\
f'(a_2) & \frac{1}{1!}f^{(2)}(a_2) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np)}(a_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
f^{(p-1)}(a_2) & \frac{1}{1!}f^{(p)}(a_2) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np+p-2)}(a_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
f(a_n) & \frac{1}{1!}f'(a_n) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np-1)}(a_n) \\
f'(a_n) & \frac{1}{1!}f^{(2)}(a_n) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np)}(a_n) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
f^{(p-1)}(a_n) & \frac{1}{1!}f^{(p)}(a_n) & \dots & \frac{1}{(np-1)!}f^{(np+p-2)}(a_n)
\end{vmatrix}$$

Ora, se il grado l di $f(x)$ è minore di $np-1$, quest'ultimo determinante è nullo per avere nulli almeno tutti gli elementi dell'ultima colonna, e quindi, in tal caso, il determinante dato è nullo.

Se poi $l = np-1$, dopo aver messo in evidenza il fattore C comune a tutti gli elementi dell'ultima colonna, e i fattori $\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{(np-1)!}$, (il cui prodotto è l'inverso del valore di $V(1, 2, \dots, np)$) comuni rispettivamente agli elementi della $2^a, 3^a \dots np^a$ colonna resta un determinante che, con $\binom{np}{2}$ cambiamenti di ordine fra colonne consecutive, si riduce al tipo XXV considerato nel n. 27.

Osservando che il coefficiente dal termine di grado massimo di $f^{(h)}(x)$ è $c\frac{(np-1)!}{(np-1-h)!}$, si conclude che il valore del determinante dato è proprio quello asserito.

32. In particolare, se nel n. precedente si suppone $p=1$ si ha la proposizione:

Se $f(x)$ è una funzione razionale intera di x, di grado $l \leq n-1$ in x, il determinante di ordine n:

$$\text{XXVIII} \qquad \begin{vmatrix} f(a_1+b_1) & f(a_1+b_2)\dots f(a_1+b_n) \\ f(a_2+b_1) & f(a_2+b_2)\dots f(a_2+b_n) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ f(a_n+b_1) & f(a_n+b_2)\dots f(a_n+b_n) \end{vmatrix}$$

è nullo per $l < n-1$, mentre per $l = n-1$, se c è il coefficiente del termine di grado massimo di $f(x)$, vale:

$$(-1)^{\binom{n}{2}} [c(n-1)!]^n \frac{V(a_1, a_2 \dots a_n)\, V(b_1, b_2 \dots b_n)}{V^2(1, 2 \dots n)}$$

ovvero:

$$(-1)^{\binom{n}{2}} [c\,(n-1)!]^n\, St\,(a_1, a_2 \dots a_n)\, St\,(b_1, b_2 \dots b_n).$$

33. Nel n. precedente, le più semplici ipotesi che si possono fare su $f(x)$ sono:

$$f(x) = x^l;$$
$$f(x) = \binom{x}{l}.$$

In corrispondenza alla 2ª ipotesi si riottengono i risultati di cui ai nn. da 11 a 14.

In corrispondenza alla 1ª ipotesi si ha la proposizione:

Il determinante:

$$\text{XXIX} \qquad \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^l & (a_1+b_2)^l \dots (a_1+b_n)^l \\ (a_2+b_1)^l & (a_2+b_2)^l \dots (a_2+b_n)^l \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ (a_n+b_1)^l & (a_n+b_2)^l \dots (a_n+b_n)^l \end{vmatrix}$$

è nullo per $l < n-1$, mentre per $l = n-1$ vale:

$$(-1)^{\binom{n}{2}} [(n-1)!]^n \frac{V(a_1, a_2, \dots, a_n)\, V(b_1, b_2, \dots, b_n)}{V^2(1, 2, \dots, n)};$$

ovvero (n. 4) =

$$(-1)^{\binom{n}{2}} [(n-1)!]^n\, St(a_1, a_2, \dots, a_n)\, St(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

34. Confrontando il risultato dal n. precedente con quello del n. 11, si hanno le identità:

XXX
$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{n-1} & (a_1+b_2)^{n-1} & \dots & (a_1+b_n)^{n-1} \\ (a_2+b_1)^{n-1} & (a_2+b_2)^{n-1} & \dots & (a_2+b_n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{n-1} & (a_n+b_2)^{n-1} & \dots & (a_n+b_n)^{n-1} \end{vmatrix} = [(n-1)!]^n \begin{vmatrix} \binom{a_1+b_1}{n-1} & \binom{a_1+b_2}{n-1} & \dots & \binom{a_1+b_n}{n-1} \\ \binom{a_2+b_1}{n-1} & \binom{a_2+b_2}{n-1} & \dots & \binom{a_2+b_n}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{a_n+b_1}{n-1} & \binom{a_n+b_2}{n-1} & \dots & \binom{a_n+b_n}{n-2} \end{vmatrix}$$

XXXI
$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{n-1} & (a_1+b_2)^{n-1} & \dots & (a_1+b_n)^{n-1} \\ (a_2+b_1)^{n-1} & (a_2+b_2)^{n-1} & \dots & (a_2+b_n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{n-1} & (a_n+b_2)^{n-1} & \dots & (a_n+b_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Da_1+b_1, n-1 & Da_1+b_2, n-1 & \dots & Da_1+b_n, n-1 \\ Da_2+b_1, n-1 & Da_2+b_2, n-1 & \dots & Da_2+b_n, n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Da_n+b_1, n-1 & Da_n+b_2, n-1 & \dots & Da_n+b_n, n-1 \end{vmatrix}$$

Nell' ultima identità è:

$$Da_i+b_j, n-1 = (a_i+b_j)(a_i+b_j-1)\dots(a_i+b_j-n+2).$$

35. Ponendo nel determinante XXIX $-b_i$ al posto di b_i e facendo $l=n-1$, si ha il determinante:

XXXII
$$\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^{n-1} & (a_1-b_2)^{n-1} & \dots & (a_1-b_n)^{n-1} \\ (a_2-b_1)^{n-1} & (a_2-b_2)^{n-1} & \dots & (a_2-b_n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n-b_1)^{n-1} & (a_n-b_2)^{n-1} & \dots & (a_n-b_n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

che, per essere $V(-b_1, -b_2, \dots, b_n) = (-1)^{\binom{n}{2}} V(b_1\, b_2 \dots b_n)$, vale:

$$[(n-1)!]^n \frac{V(a_1\, a_2 \dots a_n)\, V(b_1\, b_2 \dots b_n)}{V^2(1, 2, \dots, n)};$$

ovvero (n. 4):

$$[(n-1)!]^n\, St(a_1, a_2 \dots a_n)\, St(b_1, b_2 \dots b_n).$$

36. Facendo nel determinante XXIX $b_i = a_i$ e $l = n-1$ si ha il determinante simmetrico:

XXXIII
$$\begin{vmatrix} (2a_1)^{n-1} & (a_1+a_2)^{n-1} & \dots & (a_1+a_n)^{n-1} \\ (a_2+a_i)^{n-1} & (2a_2)^{n-1} & \dots & (a_2+a_n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+a_1)^{n-1} & (a_n+a_2)^{n-1} & \dots & (2a_n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

che vale:

$$(-1)^{\binom{n}{2}} [(n-1)!]^n \frac{V^2(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{V^2(1, 2, \ldots, n)} ;$$

ovvero (n. 4):

$$(-1)^{\binom{n}{2}} \cdot [(n-1)!]^n \, St^2(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Si noti che il determinante XXXIII differisce dal discriminante delle variabili $a_1 \, a_2 \ldots a_n$, per un fattore numerico.

37. Facendo nel determinante XXXII, $b_i = a_i$, si ha il determinante:

XXXIV

$$\begin{vmatrix} 0 & (a_1-a_2)^{n-1} & \ldots & (a_1-a_n)^{n-1} \\ (a_2-a_1)^{n-1} & 0 & \ldots & (a_2-a_n)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_n-a_1)^{n-1} & (a_n-a_2)^{n-1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

che vale:

$$[(n-1)!]^n \frac{V^2(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{V^2(1, 2 \ldots n)} ;$$

ovvero (n. 4):

$$[(n-1)!]^n \, St^2(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

ovvero ancora:

$$\binom{n-1}{1}^2 \binom{n-1}{2}^2 \ldots \binom{n-1}{e}^{\nu+1} V^2(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

dove con e si indica il quoziente per difetto della divisione di $n-1$ per 2, e ν è il resto di tale divisione.

Si noti che il determinante XXXIV per n dispari è un determinante simmetrico, mentre per n pari è un emisimmetrico, il cui pfaffiano risulta:

$$\binom{n-1}{1} \binom{n-1}{2} \ldots \binom{n-1}{e} V(a_1, a_2 \ldots a_n)$$

essendo $e = \frac{n-2}{2}$.

Si noti ancora che l'ultimo determinante differisce dal discriminante delle variabili $a_1, a_2, \ldots, a_n$, per un fattore numerico.

Salerno, luglio 1941 - XIX.

Il periodo medio dell'attività solare in relazione alle osservazioni antiche e moderne.

Nota di **Tito Nicolini**, *presentata dal socio* **L. Carnera.**

(Adunanza del dì 2 maggio 1942 - XX)

Sunto. — Osservazioni antiche di macchie solari visibili ad occhio sono dovute generalmente ai Cinesi, e sono riportate da liste citate nel testo. In questa ricerca si fa anzitutto una selezione con opportuno criterio delle osservazioni sicure e vistose, completata dalle osservazioni antiche di aurore boreali di maggior risalto a basse latitudini. Si trova che le epoche considerate corrispondono in modo soddisfacente e senza difficoltà o riserve degne di nota, ai massimi presumibili della periodicità undecennale stabilita dalle osservazioni moderne; è interessante in proposito il grafico annesso che pone in una appariscenza ben chiara una corrispondenza tra le epoche separate da 9 periodi. E' esaurito così il compito precipuo di questa ricerca, che era precisamente quello di inquadrare tutte le osservazioni sparse irregolarmente in 24 secoli in una successione coerente col ciclo solare. Infine, limitandosi a considerazioni molto elementari di prima approssimazione, il periodo medio, dal 465 a. C. al 1937 risulta di anni 11.07, con 217 periodi interposti; è anche appena accennata una variazione secolare, ma assai piccola, e la cui realtà non è qui approfondita.

L'analisi delle oscillazioni dell'attività solare è stata eseguita ripetutamente tenendo conto del materiale osservativo moderno, accuratamente accumulato e discusso. In qualche ricerca, appresso citata, si è anche tenuto conto delle antiche osservazioni di macchie visibili ad occhio, o di aurore boreali particolarmente vistose; ma a riguardo di esse è mancata una discussione o una selezione appropriata. Occorre invece adottare qualche criterio discriminativo, come è evidente dalle considerazioni che seguono.

Le osservazioni di macchie solari visibili ad occhio corrispondono con probabilità preponderante ad epoche prossime ai massimi d'attività; ma vi sono anche casi eccezionali in cui la visibilità si è avuta in epoche di minimo, come p. es. nel giugno 1899. Ora un inconveniente è evidentissimo: l'inclusione di massimi non reali facilmente porta ad errato conteggio del numero dei periodi nella successione saltuaria ed imperfetta da ricostruire, e quindi altera il periodo medio dedotto. Che l'inconveniente sia effettivo, si può rilevare già da una nota di H. H. Turner annessa alla lista di osservazioni cinesi di S. Hirayama appresso citata; infatti in detta nota

l'autore deduce un periodo di anni 11.06 dalla lista, ma trova che anche un periodo di anni 10.54 conviene bene ad essa; ambiguità che sarebbe esclusa da un conteggio accurato del numero di periodi.

Le osservazioni antiche di macchie sono in genere tratte dagli Annali cinesi, dove sono riferite in termini che generalmente non lasciano dubbio, e sono state adoperate le fonti seguenti:

I). — S. Hirayama: « *On supposed Sun-spots observed with the Naked Eye* ». — *The Observ.*, v. 12 (1889), p. 217.

II). — P. J. de Moidrey: « *Observations anciennes de Taches solaires en Chine* ». — *Bull. Astr.*, v. 21 (1904), p. 59, con traduzione di date del P. P. Hoang.

III). — R. Wolf: « *Mitteilungen über die Sonnenflecken* », ed « *Astron. Mitteil.* », che danno le fonti anche delle osservazioni supplementari fatte in Europa.

IV). — S. Kanda: « *Ancient records of Sun-spots and Auroras in the far East and the variation of the period of Solar Activity* ». — *Proc. Imp. Ac. of Sc.*, Tokyo, v. 9 (1932), p. 293.

Come si è detto, la considerazione indiscriminata di tutte le osservazioni porterebbe ad includere, tra i reali, massimi non esistenti; per evitare questo rischio, senza d'altronde impoverire eccessivamente la serie di dati disponibile, sono stati adottati i criteri di discriminazione seguenti. Osservazioni singole di macchie isolate sono considerate soltanto quando abbastanza imponenti da esserne rilevata ad occhio la forma (indicata dagli osservatori cinesi come quella di un dattero, una mela, un uccello, un uovo, una monetina). Osservazioni successive, che per uno stesso massimo presunto si estendono ad intervalli varii (da sei mesi a sei anni) sono considerate e poste in corrispondenza all'epoca media, purchè almeno in numero di tre. Sono state considerate anche macchie singole durate per più di una rotazione solare, e macchie contemporanee purchè almeno in numero di tre. Sempre, come detto, ritenendo sufficiente anche una singola macchia di forma descritta. Si è tenuto conto anche di oscuramenti del Sole o di diminuzione della luce diurna quando le descrizioni lasciano presumere un'origine solare.

Le osservazioni antiche di aurore boreali sono riportate da

V). — H. Fritz: « *Polarlichtkatalog* » e supplementi: v. *Verzeichnis beobachteter Polarlichter*, Vienna 1873; v. anche *Month. Wea. Rev.*, v. 56 (1928), p. 401.

La relazione di queste manifestazioni del magnetismo terrestre con l'attività solare è ben nota; tuttavia la loro considerazione in blocco è particolarmente suscettibile d'introdurre dati spurî, ed ecco un esempio

molto critico. Il Wolf stabilisce un massimo d'attività solare pel 1626; mentre il predetto catalogo del Fritz sembrerebbe più chiaramente mostrare un massimo intorno al 1623 ed uno intorno al 1629. L'incongruenza è dovuta naturalmente al carattere tutt'altro che sistematico delle osservazioni d'aurora al tempo di Galileo, osservazioni rese inutili dalla loro stessa maggiore e disordinata frequenza. Dunque anche e particolarmente per queste manifestazioni indirette di attività solare, allo scopo di isolare i massimi, occorre tenersi entro un buon margine di sicurezza. Quindi queste antiche osservazioni d'aurora sono riportate soltanto se ripetute per almeno quattro giorni nello stesso anno, oppure se specificate come vistose in modo eccezionale (escludendo perciò quelle indicate soltanto come grandi), o ancora se osservate a latitudini molto basse (Sud della Cina, Siria, Palestina).

Sono state considerate in pochi casi anche osservazioni non soddisfacenti ai criteri detti, ma almeno con controllo reciproco di macchie ed aurore; tuttavia in questi pochi casi i dati restano generalmente scarsi, e quindi verranno appresso (alla tabella II) indicati con incertezza.

Le osservazioni dirette più remote corrispondenti a presumibili massimi di macchie sono quella del Sole oscurato del 44 a. C. (Virgilio riporta che il Sole fu oscurato per la morte di Cesare), quella cinese di una macchia (descritta della grandezza di una monetina) nel 28 a. C., e quella ancora cinese del 20 d. C. descrivente il Sole come tutto scuro.

Le osservazioni più antiche di aurore boreali vistosissime si riferiscono a quella del 465 a. C., che durò per 75 giorni, e quella del 443 a. C., che durò per 60 giorni; seguono ancora le aurore osservate nella Cina meridionale nel 208 a. C. ed a Cartagine nel 202 a. C.

A riguardo di casi particolari di considerazione di dati, si aggiungono i seguenti chiarimenti. L'anno 342, nonostante comporti solo una o due osservazioni di macchie, è incluso nella lista appresso compilata come determinazione sicura, poichè s'inquadra con indubbia certezza tra i dati precedenti e seguenti. Anche l'anno 20, che il Moidrey riporta con la citazione «*Sole tutto nero*» apponendovi un rilievo di dubbio, è stato considerato come dato attendibile. Intorno al 373 si sono avute osservazioni di macchie frequenti, ed anche con forma descritta, per un intervallo di 7 anni; il massimo è indubbio, seppure con data non molto bene precisabile; ed analogo rilievo va fatto pel 501.

Un intervallo critico si ha per qualche periodo dopo il massimo ben delineato del 1078, a causa della molteplicità delle osservazioni che sembrano rivelare un'attività intensa ed irregolare, non seguita con sufficienti mezzi. Infatti nel 1089 si ha l'osservazione di una singola macchia riportata dal Fritz, e quindi qui non considerata. Nel 1097 e 1098 si sono avute almeno 5 osservazioni d'aurora, estese fino in Siria, ed aurore si sono registrate tutti gli anni dal 1093 al 1107 (eccetto il 1100 e il 1103); quindi

la presunzione di massimo pel 1097 o 1098 è indecisa, e le osservazioni di macchie sembrano contrastanti, essendosi riscontrata nel 1103 grande diminuzione della luce diurna, nel 1104 una macchia descritta a forma di dattero (da Moidrey), nel 1105 un'altra macchia. Segue ancora qualche difficoltà per osservazioni del 1108 (riportata dal solo Kanda), 1112 (da Hirayama, e da Moidrey riferite per due o tre macchie come castagne), per passare quindi al massimo pronunciato del 1120. Se si assumessero massimi pel 1098, 1103, 1112, 1120, si avrebbero periodi consecutivi di 5, 9, 8 anni, con media di 7.33; una tale discontinuità nella periodicità solare, non è tuttavia imposta dalle osservazioni, frequenti in quel tempo quanto improprie. Il miglior criterio è evidentemente quello di dar meno peso alle sparse osservazioni d'aurore, e di considerare solo quelle del 1097 e 1098 in relazione al massimo rivelato dall'oscuramento solare del 1103; massimo che è stato dunque assunto, con indicazione d'incertezza, pel 1101. Seguirebbe quello del 1112 (o 1110 volendo tener conto dell'osservazione riportata da Kanda), e quindi del 1120.

Si noti che sono stati eliminati varî dati bene inquadrabili nella successione dei massimi; la loro inclusione avrebbe richiesto criterî meno rigidi di selezione, e ne sarebbe derivato il grave inconveniente dell'inclusione di massimi inesistenti.

La tabella I riporta in sintesi le osservazioni antiche scelte, coi dati corrispondenti. I numeri indicano quante osservazioni sono state fatte di macchie (*m*) od aurore (*a*); *s* indica osservazioni successive nello stesso anno; *ss* in anni diversi (la data della 1ª colonna essendo la media) generalmente consecutivi, ed il numero seguente è il numero totale di anni consecutivi dell'intervallo in cui sono sparse le osservazioni. Le macchie con forma descritta hanno ancora l'indicazione *f*, le osservate contemporaneamente *c*; con *o* è indicata l'osservazione di oscuramento del Sole. Qualche numero mancante, non è dato dalle fonti.

TABELLA I. — *Lista delle osservazioni antiche più decise di macchie solari ed aurore boreali.*

Date	Fenomeni osservati
— 461	*a*, 75 giorni
— 442	*a*, 60 giorni
— 207	*a*, Sud Cina
— 201	*a*, Cartagine
— 43	*o*
— 27	1 *mf*
+ 20	*o*
187	1 *mf*; *o* (dubbio)
194	*a* frequente e grande
302	5 *m ss* 4 (di cui, nel 299, 1 *mf*)
311	1 *mf*
322	4 *m ss* 2 ed *o*
342	2 *m s*
355	2 *mf ss* 2
360	4 *m ss* 3, di cui 1 *mf* (359)
373	9 *m ss* 7, di cui 5 *mf*
388	2 *mf ss* 2
398	4 *m ss* 6
501	9 *m ss* 6; max. evidente; nel 502, *a*
511	4 *m ss* 4
535	*o* (535-36, per 14 mesi)
541	*a* frequente
566	*a*, 70 giorni; altre nel 563, 64, 67
567	1 *mf*
579	2 *m s f*
585	3 *a s* grandi; altre negli anni vicini
601	4 *a ss* 4
616	*a*, Sud Cina
626	*o* (8 mesi, sole parzialmente oscurato)
677	*a*, 10 giorni
778	1 *m*; *a* nel 776 e 778
787	1 *m*; *a* nel 786
807	3 *a ss* 3, di cui 2 descritte intense; anche *m*
830	5 *m ss* 7, di cui 2 *mf* (max. evidente)
840	3 *m ss* 5, di cui 1 *mf*; *a ss* 3, frequenti, intense
859	3 *a s* molto intense; ancora *a* nell'861
864	1 *mf*
874	1 *mf*
888	1 *m*; *a* nell'887 e 890
905	*a*, Sud Cina
927	1 *m*; *a* nel 926, 27, 30
974	2 *m s*
978	3 *a ss* 2, di cui 2 grandi
992	5 *a ss* 2, tutte grandi
1001	4 *a ss* 4
1005	1 *m*
1078	3 *mf ss* 3, osservate per 15, 19, 12 giorni
1097	5 *a ss* 2, visibili in Siria; altre dal 1093 al 1107!
1104	*o* intenso nel 1103; 2 *m ss* 2, di cui 1 *mf*
1110	nel 1108, 1 *m*; nel 1110, 2 *m c f*
1117	4 *a* visibili in Palestina, altre dal 1114 al 1122
1120	7 *m ss* 6
1130	2 *m ss* 3, di cui 1 *mf*
1138	7 *m ss* 4, di cui 2 *mf*
1149	nel 1148, 1 *m*; nel 1150, *a*
1160	1 *mf*
1171	1 *m*
1176	6 *a ss* 7
1185	3 *m ss* 2, di cui 2 *mf*; osserv. parecchi giorni
1193	1 *m*; 7 *a ss* 7
1202	5 *m ss* 6, di cui 3 *mf*; molti giorni d'osservazione
1204	*a ss* 3, frequenti
1276	1 *mf*
1308	*a* molto notevole
1361	idem
1362	1 *m*
1372	15 *m ss* 6, attività continuamente rilevata
1382	3 *m ss* 3
1402	1 *m*
1403	1 *a*
1520	4 *a ss* 8
1529	1 *m*
1530	*a* frequenti vist. dal 1529 al 32
1539	*a* frequenti per alcuni anni
1547	*o*; 1 *m*, osservata per 3 giorni
1551	4 *a*; varie altre dal 1545 al 1557!
1572	10 *a*, grandi; altre numerose dal 1567 al 76!
1581	molte *a*, ma osservazioni sparse in molti anni
1591	6 *m ss* 9
1604	1 *m*; *a* frequenti, anche negli anni prec. e seg.
1617	4 *m ss* 3

Dopo il 1604, le osservazioni europee prendono il dominio incontrastato, e forniscono dati via via più attendibili. La loro conoscenza complessiva, più o meno sicura, è dovuta alle laboriose ricerche di R. Wolf (e in seguito di A. Wolfer), che elaborano le osservazioni fin dal tempo di Galileo e Scheiner. Per lo studio della periodicità delle macchie, sono tabulati dal Wolf [1]) i *numeri relativi* o indici di attività a cominciare dal 1749. Ma quantunque varie ricerche siano state basate su di essi, le difficoltà poste al Wolf dalle osservazioni meno recenti erano assai gravi, e la serie veramente utile per uno studio statistico elaborato, non può farsi risalire anteriormente alle osservazioni di Schwabe. Questa affermazione può essere ben provata dalla storia delle osservazioni solari, [2]) ma qui non è il caso di estendersi su tale soggetto, e basterà ricordare il frequente procedere forzato, per probabilità ed interpolazioni, del Wolf. Le osservazioni precedenti possono tuttavia utilizzarsi, in particolar modo limitandosi e considerare le semplici epoche di massimo o minimo, in genere abbastanza attendibili.

Nella tabella II sono riunite tutte le epoche dei massimi dedotte dalla tabella I per le osservazioni antiche (assegnando maggior peso alle osservazioni di macchie) e da Wolf-Wolfer per le moderne, divise in 3 periodi: fino al 1604, dal 1615 al 1816, dal 1828 al 1937; a queste ultime, che datano appunto dalle osservazioni di Schwabe, sono aggiunte anche le epoche dei minimi, pure abbastanza sicure. I massimi presunti antichi, fino al 1604, per una base uniforme di collegamento coi moderni, si considereranno avvenuti a metà dell'anno cui si riferiscono (per quelli a. C. si noterà la trasformazione nell'uso astronomico delle date fornite dalla cronologia). L'indice *i* è apposto a indicare qualche incertezza per disorganica molteplicità di dati, *j* viceversa per scarsità di dati.

È interessante riportare ancora in un grafico, (che potrebbe esser sostituito da un'altra tabella), le epoche fissate pei massimi, in modo da porre in corrispondenza quelle separate da 9 periodi. L'interesse della corrispondenza è in ciò: siccome il periodo dell'attività solare è già noto in anni $11\frac{1}{9}$ circa, in 100 anni, si avranno quasi esattamente 9 periodi, e così i massimi dovrebbero ripresentarsi all'incirca agli stessi anni di ogni secolo, almeno per varî secoli consecutivi, tranne cioè un eventuale lento sfasamento dovuto alla differenza del periodo reale da $11\frac{1}{9}$ anni.

---

[1]) V. i valori riveduti da A. Wolfer, p. es. in *Month. Wea Rev.*, v. 30, 1902, p. 171.

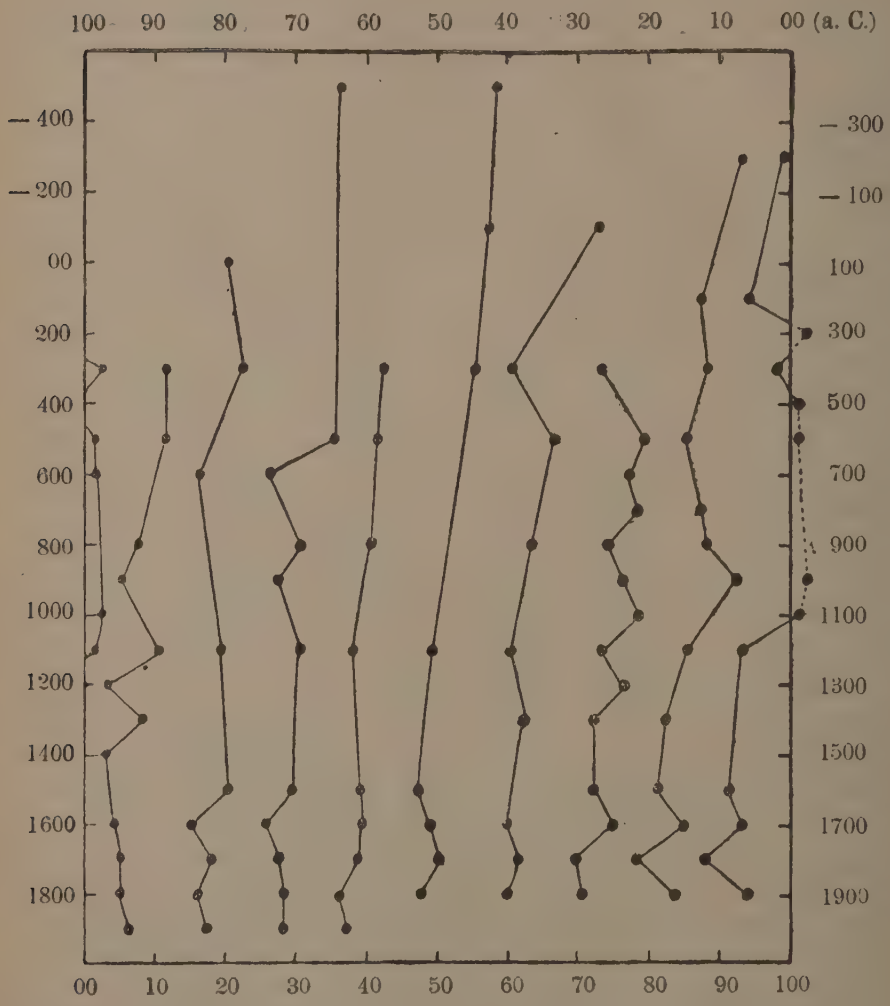
[2]) V. p. es. W. A. Luby, « *The mean Period of the Sun spots* », *Pop. Astr.*, v. 36 (1928), pp. 537 e 583; di interesse critico è l'ultima decade del 1700, e anni vicini. Il massimo del 1829.5 di Wolf, è stato portato al 1828.5 di Luby.

TABELLA II. — *Lista riassuntiva di massimi d'attività solare per osservazioni decise di macchie o aurore.*

					Minimi
— 463.5	579.5	1130.5	1615.5	1828.5	
— 441.5	585.5	1138.5	1626.0		1833.9
— 206.5	601.5$_i$	1149.5$_j$	1639.5	1836.5	
— 200.5	616.5	1160.5	1649.0		1843.5
— 42.5	626.5	1173.5	1660.0	1848.1	
— 26.5	677.5	1185.5	1675.0		1856.0
+ 20.5	778.5$_j$	1193.5	1685 0	1860.1	
187.5	787.5$_j$	1203.5	1693 0		1867.2
194.5	807.5	1276.5	1705.5	1870.6	
302.5	830.5	1308.5$_j$	1718.2		1878.9
311.5	840.5	1362.5	1727.5	1883.9	
322.5	863.5	1372.5	1738.7		1889.6
342.5	874.5	1382.5	1750.3	1894.1	
355.5	888.5$_j$	1402.5$_j$	1761.5		1901.7
360.5	905.5	1520.5$_i$	1769.7	1906.4	
373.5$_i$	927.5	1529.5	1778.4		1913.6
388.5	976.5	1539.5$_i$	1788.1	1917.6	
398 5	992.5	1547 5	1805.2		1923.6
501.5$_i$	1002.5	1572.5$_i$	1816.4	1928.4	
511.5	1078.5	1581.5$_i$			1933.8
535.5	1101.5$_i$	1591.5$_i$		1937.4	
541.5	1110.5	1604.5$_i$			
566.5	1119.5$_i$				

Nel grafico, i punti rappresentano le epoche fissate dei massimi, le righe successive corrispondendo ai successivi secoli, ed ogni riga riferendosi nei millimetri successivi agli anni di ogni secolo (da 0 a 100). La rappresentazione grafica oltre che interessante è anche utile, facilitando notevolmente la determinazione della corrispondenza suddetta, ossia permettendo con più spedita sicurezza di valutare il numero di periodi che via via separano le osservazioni. La corrispondenza ricercata è data dalle spezzate del disegno; contrariamente a quanto potrebbe pensarsi, essa non comporta ambiguità o riserve di rilievo, ed è stata fissata dalle seguenti condizioni: 1°) armonizzare in uno schema approssimativamente undecennale *tutte* le epoche prescelte; 2°), per la possibilità o meno di scarti o deviazioni notevoli nel collegamento dei punti, tenere di norma le osservazioni moderne (posteriori al 1600), i cui collegamenti tracciati sono sicuri; 3°), tener conto che la improbabilità di scarti forti da 11 anni nella media di più periodi suc-

Corrispondenza tra i massimi separati da 9 periodi.



cessivi, deve ritenersi assai notevole; mentre scarti anche superiori per singoli periodi possono ammettersi, come mostra il periodo moderno (effettivo o meno) 1788-1805 di 17 anni; 4°), evitare variazioni sistematiche di pendenza, o di andamento generale dei collegamenti (e cioè variazioni secolari notevoli del periodo) che non siano effettivamente suggerite dai

punti, e cioè quando contrastino con l'andamento immediato e più semplice. I tratti di collegamento lunghi sono naturalmente resi più certi dai collaterali.

Tenuto accurato conto di queste condizioni, la cui legittimità è evidente, qualche tentativo diverso dal grafico è risultato senza difficoltà da scartare, e sembra indubbio che la migliore armonizzazione delle osservazioni sia quella indicata. Le condizioni imposte, non permettono di ritenere l'armonizzazione delle osservazioni come apparente e provocata da collegamenti arbitrarî delle osservazioni antiche con le moderne. Infatti non è poco importante la constatazione che i collegamenti adottati sono quelli più semplici e generalmente quasi immediati; e le apparenti anomalie o deviazioni non eccedono sostanzialmente quelle accertate dalla serie moderna. L'anomalia più grave sembra quella del collegamento 1101-1193, che si riflette in tutta una ristretta zona del grafico; ma con un centinaio di punti è ben presumibile che possa presentarsi una tale anomalia, se si tien conto dell'approssimazione grossolana di data risultante da molte indicazioni. e d'altronde il risalto non è veramente eccessivo. Le anomalie puramente locali, come quelle del 992, 360, 302, 626, rientrano completamente nell'ordine di quelle constatate dalla serie moderna. L'osservazione del 28 a. C., anche se collegata con quella del 373 anzichè con quella del 360, non dà alterazione pel conteggio complessivo dei periodi; e l'intervallo 28 a. C. - 44 a. C. può senza inconvenienti considerarsi come un periodo eccezionalmente lungo (e così è indicato), o comprendente due periodi molto brevi; ma questa seconda possibilità darebbe una spezzata (dal 28 a. C. al 1870) meno armonizzante con l'andamento generale delle altre.

È forse difficile convincersi pienamente che la corrispondenza individuata non è arbitraria senza prova personale. Per questo occorre disegnare i punti e tentare i collegamenti in modo da rispondere alle condizioni imposte. Alcuni non affrettati tentativi, col sufficiente esame degli inconvenienti, può convincere della convenienza effettiva della corrispondenza. La questione è veramente un pò delicata. Difatti, non tanto importano molti errori di data, quanto l'errore di conteggio anche di un solo periodo; se questo errore non è corretto da errore contrario intorno alla stessa epoca, le valutazioni del periodo medio risultano alterate, sia pure di poco, come risultano intaccate osservazioni interessanti che possono dedursene. Lo stesso rilievo varrebbe, se nonostante la selezione fosse restato anche un solo punto in sopranumero, cosa del resto poco probabile per questa ricerca.

Dalla disposizione elaborata si può ricavare immediatamente qualche interessante valutazione del periodo medio, in dipendenza delle date estreme d'osservazione. Risultano interessanti i seguenti valori, dei quali il penultimo è dedotto dai minimi della serie più recente di Wolf.

TABELLA III — *Valutazioni immediate del periodo medio.*

1ª epoca	2ª epoca	N.° periodi	P_m
— 463.5 — 441.5	1917.6 1937.4	215	11ª.070
— 463.5 — 441.5	322.5 342.5	71	11.056
322.5 342.5	1130.5 1149.5	73	11.062
1130.5 1149.5	1917.6 1937.4	71	11.091
— 463.5 — 441.5	1615.5 1639.5	188	11.064
1615.5 1639.5	1917.6 1937.4	27	11.111
1828.5 1836.5	1928.4 1937.4	9	11.156
1833.9 1843.5	1923.6 1933.8	8	11.250
1828.5	1937.4	10	10.890

Il confronto dei varî valori è interessante. Il primo può assumersi come l'effettivo valore medio del periodo di attività solare. I tre successivi denoterebbero una variazione secolare progressiva, sebbene debole, in tre intervalli di circa 800 anni; i quattro valori susseguenti confermerebbero questa variazione. Ma l'ultimo sebbene riferentesi a deduzione meno elaborata dalla serie più recente, sebbene cioè il suo contrasto cogli altri risulti casuale ad un facile esame, è posto per suggerire qualche prudenza nelle conclusioni, poichè bastano alterazioni relativamente lievi e possibili alla data di qualche massimo osservato per intaccare le conclusioni stesse.

D' altronde lo scopo di questa nota era essenzialmente quello di inquadrare le osservazioni antiche e moderne connesse all'attività solare in una successione coerente alla periodicità della stessa attività, ed è quindi esaurito. Le valutazioni stesse della tabella III vanno considerate come di prima approssimazione, e ad altra ricerca è riservato ogni sviluppo più particolarmente statistico o analitico

Calcolo statico dei telai elastici spaziali.

Nota del Dott. Ing. **Guido Guerra**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

Adunanza del dì 7 marzo 1942 - XX)

Sunto. — L' Autore si propone di applicare il metodo delle deformazioni in una forma analoga a quella data dal Takabeya per i telai elastici piani ad un telaio elastico spaziale soggetto alle più generali condizioni di carico.

Egli esamina un nodo di un telaio spaziale con le sei aste fra loro perpendicolari, ivi concorrenti; ed utizzando il principio della sovrapposizione degli effetti ed il fatto che le facce dei diedri rettangoli, i cui spigoli sono le direzioni delle aste, sono piani principali per le aste stesse, scompone il momento trasmesso dal nodo ad una asta generica nelle tre direzioni delle aste. Scrive in ciascun piano le relazioni che legano detti momenti alle componenti del moto dei nodi, estremi dell'asta considerata, giacenti nel detto piano e le equazioni cartesiane di equilibrio alla rotazione per i nodi e per le serie di aste.

L'A. mostra quindi, come, sostituendo nel sistema delle predette equazioni, alle componenti dei momenti, le loro espressioni in funzione delle componenti dello spostamento dei nodi, si possa agevolmente determinare il comportamento statico della struttura spaziale in esame, e come, in un caso assai frequente, il sistema delle equazioni risolutrici si scomponga in tre sistemi parziali, che é lecito risolvere separatamente.

1) *Generalità — Relazioni fondamentali.*

Scopo di queste pagine è di indicare la possibilità di applicare il metodo delle deformazioni, in una forma analoga a quella data dal Takabeya per i telai elastici piani, allo studio dei telai elastici a tre dimensioni.

Prendendo in esame un qualunque nodo appartenente ad una struttura spaziale con le sei aste in esso connesse (vedi figura) possiamo dare nella tabella i simboli necessari per la nostra esposizione.

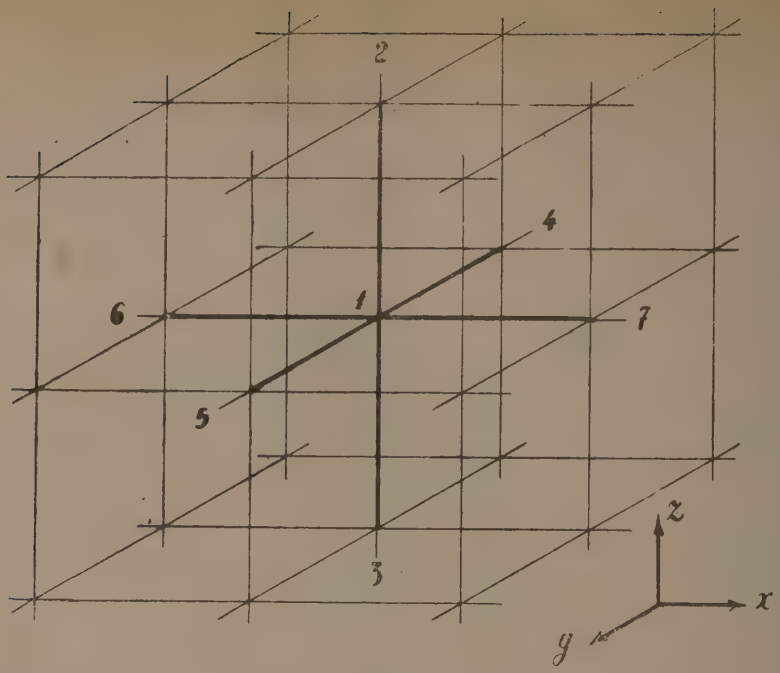


Figura.

TABELLA

x y z	coordinate
M $\mathbf{M}$ m	componenti rispetto agli assi x, y, z del vettore momento della reazione del nodo sulle aste
M_* $\mathbf{M}_*$ m_*	componenti dei momenti d'incastro perfetto delle singole aste.
φ ψ ϑ	componenti delle rotazioni dei nodi
S $\mathbf{S}$ s	componenti delle traslazioni dei nodi
Φ Ψ Θ	doppio dell'inverso dei pesi elastici delle singole aste computati calcolando i momenti d'inerzia intorno agli assi baricentrici delle sezioni delle aste rispettivamente paralleli ad x, y, z
I I i	momenti d'inerzia

I momenti di inerzia polari, saranno indicati con un apice e così contrassegniamo i momenti torcenti. Così M'_{47} è la componente torcente tra-

smessa dal nodo 1 all'asta 1-7: con Φ'_{17} indicheremo invece: $\frac{GI'}{ql_{17}}$ [1]).

Utilizzando i simboli testè stabiliti prendiamo in esame, ad esempio, l'asta 1-2.

Ciascuna delle tre componenti M_{12} $\mathbf{M}_{12}$ m_{12} della reazione di incastro che il nodo l'offre alla trave 1-2, considerata come agente separatamente dalle altre, solleciterà la trave 1-2 a deformarsi soltanto nel rispettivo piano perchè è costituita da una coppia agente in un piano principale della trave prismatica.

Potremo perciò scrivere con i nostri simboli, nei piani $y\ z$ ed $x\ z$ nei quali la trave è semplicemente inflessa le note relazioni di TAKABEYA.

Piano $y\ z$:

$$(1)\quad \begin{cases} M_{12} = \dfrac{2EI}{l_{12}}\left(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\dfrac{\mathbf{S}_2}{l_{12}}\right) - M_{*12} = \Phi_{12}\left(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\dfrac{\mathbf{S}_2}{l_{12}}\right) - M_{*12} \\ M_{21} = \dfrac{2EI}{l_{12}}\left(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\dfrac{\mathbf{S}_2}{l_{12}}\right) - M_{*21} = \Phi_{12}\left(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\dfrac{\mathbf{S}_2}{l_{12}}\right) - M_{*21} \end{cases}$$

Piano $x\ z$:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathbf{M}_{12} = \dfrac{2EI}{l_{12}}\left(2\psi_1 + \psi_2 - 3\dfrac{S_2}{l_{12}}\right) - \mathbf{M}_{*12} = \Psi_{12}\left(2\psi_1 + \psi_2 - 3\dfrac{S_2}{l_{12}}\right) - \mathbf{M}_{*12} \\ \mathbf{M}_{21} = \dfrac{2EI}{l_{12}}\left(2\psi_2 + \psi_1 - 3\dfrac{S_2}{l_{12}}\right) - \mathbf{M}_{*21} = \Psi_{12}\left(2\psi_2 + \psi_1 - 3\dfrac{S_2}{l_{12}}\right) - \mathbf{M}_{*21} \end{cases}$$

Oltre le componenti già esaminate il moto del punto 1 consta generalmente anche di uno spostamento s lungo l'asse z e di una rotazione ϑ_1 intorno allo stesso asse z.

Trascuriamo, come suggerisce la pratica del metodo delle deformazioni, le deformazioni assiali dell'asta 1-2 ($s_1 = s_2$) e limitiamoci alla ricerca delle relazioni che legano le deformazioni torsionali della asta in esame (1-2) ai momenti torcenti che sollecitano questa asta.

---

[1]) Si ricordi dalla statica grafica che:

$$\Phi' = \frac{m}{2q(m+1)}(\Psi + \Theta)$$

$$\Psi' = \frac{m}{2q(m+1)}(\Phi + \Theta)$$

$$\Theta' = \frac{m}{2q(m+1)}(\Phi + \Psi)$$

q è il « fattore di torsione ».

La rotazione ϑ_1 sarà data evidentemente dalla somma della rotazione ϑ_2 e di quelle dovute alle coppie agenti sulla trave 1-2 e cioè precisamente il momento m_1, che deforma torsionalmente tutta la trave; i momenti applicati esterni m_p; m_r; m_s; .... ecc. e costituiti da coppie agenti rispettivamente a distanze l_{1p}, l_{1r}, l_{1s} ecc. dalla sezione 1 ed l_{2p}, l_{2r}, l_{2s} .... ecc. dalla sezione 2 altro estremo della trave; distanze naturalmente tali che: $l_{p1} + l_{p2} = l_{12}$, ecc.

Come è noto dalla teoria della torsione potremo scrivere:

$$\vartheta_1 = \frac{q\, l_{12}}{Gi'} m'_1 + \frac{q\, l_{p2}}{Gi'}\, m'_p + \frac{q\, l_{r2}}{Gi'}\, m'_r + \ldots\ldots\ldots + \vartheta_2$$

cioè

$$m'_1 = \frac{Gi'}{q\, l_{12}} (\vartheta_1 - \vartheta_2) - \frac{l_{p2}}{l_{12}}\, m'_p - \frac{l_{r2}}{l_{12}}\, m'_r - \ldots\ldots\ldots$$

ed analogamente

$$m'_2 = \frac{Gi'}{q l_{12}} (\vartheta_2 - \vartheta_1) - \frac{l_{1p}}{l_{12}}\, m'_p - \frac{l_{1r}}{l_{12}}\, m'_r - \ldots\ldots\ldots$$

sommando e ricordando che $l_{1p} + l_{p2} = l_{12}$ si ha, come è ovvio:

$$m'_1 + m'_2 = -(m'_p + m'_r + m'_s + \ldots\ldots\ldots).$$

Ricordando la nota espressione che lega G ad E abbiamo infine (ritenendo il modulo di Poisson eguale a 4):

$$m'_1 = \frac{1}{5q} \cdot \frac{2Ei'}{l_{12}} \left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) - \sum_i \left(1 - \frac{l_{1i}}{l_{12}}\right) m'_i$$

$$m'_2 = \frac{1}{5q} \cdot \frac{2Ei}{l_{12}} \left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) - \sum_i \frac{l_{1i}}{l_{12}}\, m'_i$$

ϑ, più generalmente, per m qualunque:

$$(3) \quad \begin{cases} m'_1 = \Theta'_{12}\left(\vartheta_1 \quad \vartheta_2\right) - \sum_i \left(1 - \frac{l_{1i}}{l_{12}}\right) m'_1 \\ m'_2 = \Theta'_{12}\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) - \sum_i \frac{l_{1i}}{l_{12}}\, m'_i \end{cases}$$

È facile scrivere per una asta qualunque del telaio spaziale le relazioni analoghe alle (1), (2), (3); basta osservare che mentre per le aste, come la 12, parallele alla direzione dell'asse z si ha:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\varphi, S) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\psi, S) \qquad m = m'(\vartheta)$$

Per le aste parallele all'asse x si ha:

$$M' = M\ (\varphi) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M}\ (\psi, s) \qquad m = m\ (\vartheta, S)$$

Ed infine, per le aste parallele all'asse y si ha:

$$M = M(\varphi, s) \qquad \mathbf{M}' = \mathbf{M}'\ (\psi) \qquad m = m\ (\vartheta, S)$$

2) *Impostazione del calcolo.*

Per determinare il comportamento statico di un telaio spaziale e scrivere le equazioni determinatrici delle incognite, procederemo nel modo seguente, analogamente a quanto si pratica nell'applicare il metodo di TAKABEYA ai telai piani, utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti:

a) si scrivono le relazioni (1), (2), (3) relative a tutte le travi del nostro telaio spaziale;

b) immaginando isolato ciascun nodo del telaio, si scrivono per ognuno di esso le equazioni di equilibrio alla rotazione: avremo per il nodo generico 1, connesso ai nodi 2, 3, 4, 5, 6, 7:

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{i}^{7} M_{1i} = 0 \\ \sum_{i}^{7} \mathbf{M}_{1i} = 0 \\ \sum_{i}^{7} m_{1i} = 0 \end{cases}$$

Se i nodi sono n avremo così evidentemente $3n$ equazioni.

c) Qualora il telaio sia simmetrico e simmetricamente caricato rispetto a due piani verticali, paralleli ciascuno ad una delle due serie di aste orizzontali, i nodi non avranno, come è ovvio, spostamenti orizzontali ($S = \mathbf{S} = 0$), e se il telaio non ha maglie a sbalzo o disuniformi assestamenti di fondazioni, non vi saranno nemmeno spostamenti verticali ($s = 0$).

Ma se, per esempio, non esiste nessun piano parallelo ad $y\ z$ che sia di simmetria per il sistema, i nodi subiranno generalmente uno spostamento S nella direzione x perpendicolare al piano $y\ z$.

Così generalmente potranno aversi degli spostamenti $\mathbf{S}$ ed s.

Per determinare queste incognite supplementari, dovute a dissimetrie della struttura o delle condizioni di carico, non bastano le (4) che sono solo tante quante sono le componenti della rotazione dei nodi, ma occorre scrivere le condizioni di equilibrio (alla rotazione) di alcune parti della struttura opportunamente scelte.

I tagli mediante i quali si isolano gli elementi del telaio in esame, devono ovviamente essere scelti in modo tale che le caratteristiche della sollecitazione ad essi relative siano o momenti (col che le equazioni che si scrivono si possono immediatamente associare alle (4), o forze interne immediatamente determinabili.

Consideriamo, per esempio, un telaio ad un sol piano, perfettamente incastrato alle basi (sono cioè possibili solo spostamenti S ed S, nelle direzioni orizzontali x ed y, dei nodi superiori). È facile la estensione ai casi più complessi.

Siano F ed $\mathbf{F}$ le componenti dirette come l'asse x o come l'asse y, della risultante di tutte le forze orizzontali agenti sul telaio nel piano delle travi orizzontali.

Siano T_x e T_y le componenti della forza di taglio agli incastri di un ritto generico al quale supporremo che non siano applicate direttamente forze esterne.

M_i ed M_s, rispettivamente, le componenti nel piano $y\ z$ del momento di incastro al piede ed in cima di ciascun ritto.

M_p ed M'_{p+1} le componenti torcenti di incastro della p_{esima} trave orizzontale di una qualunque delle m file di travi dirette come l'asse x.

$\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}'_f$, $\mathbf{M}'_{f+1}$ le analoghe componenti di momento nel piano $x\ z$.

Detta h l'altezza del piano, sommando le equazioni di equilibrio (alla rotazione nel piano $y\ z$) di tutti i ritti, si ha:

$$(5_a) \qquad \Sigma M_i + \Sigma M_s + h \Sigma T_y = \Sigma \mathbf{M}_i + \Sigma \mathbf{M}_s + \mathbf{F}h = 0$$

Si possono scrivere inoltre le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno all'asse longitudinale di tutte le travi dirette come l'asse x, e sommare quelle relative a campate affiancate (comprese cioè fra gli stessi piani verticali perpendicolari all'asse x).

Se sulle travi orizzontali non agiscono momenti torcenti esterni e se il telaio ha m campate nella direzione x, si hanno m equazioni del tipo:

$$(5'_a) \qquad \Sigma M'_p + \Sigma M'_{p+1} = 0$$

Analogamente nel piano $x\ z$ si può scrivere:

$$(5'_a) \qquad \Sigma \mathbf{M}_i + \Sigma \mathbf{M}_s + Fh = 0$$

e k equazioni come

$$(5'_b) \qquad \Sigma \mathbf{M}' + \Sigma \mathbf{M}'_{f+1} = 0$$

d) si sostituiscono nelle equazioni (4) e (5) i valori dei momenti in funzione delle rotazioni (assolute) e delle traslazioni (relative) dei nodi.

Riferendoci alla figura, abbiamo (per l'equilibrio della rotazione del nodo 1 nel piano $y\,z$):

$$(6_a) \qquad \varphi_1 \left(2 \sum_2^5 \Phi_{1f} + \sum_6^7 \Phi'_{1b}\right) + \sum_2^5 \varphi_1 \Phi_{1f} - \sum_6^7 \varphi_b \Phi_{1b}' -$$

$$- 3\left(\frac{\Phi_{12} S_{12}}{l_{12}} + \frac{\Phi_{13} S_{13}}{l_{13}} + \frac{\Phi_{14} S_{14}}{l_{14}} + \frac{\Phi_{15} S_{15}}{l_{15}}\right) =$$

$$= \sum_2^5 M_{*1f} - \sum_6^7 \Sigma_f \left(1 - \frac{l_{1f}}{l_{1b}}\right) M'_{1f}$$

con le due analoghe valevoli nei piani $x\,y$ ed $x\,z$. [1])

Potremo inoltre analogamente trasformare le (5) in un gruppo di equazioni nelle componenti degli spostamenti che chiameremo (7).

e) Si risolve il sistema costituito dalle (6) e dalle (7).

Si noti che, data la piccolezza delle deformazioni assiali delle singole aste, ritti o travi che siano, la componente della traslazione dei nodi allineati secondo una data direzione (x, y, z) misurata secondo quella direzione, è eguale per tutti i nodi allineati.

Le componenti cartesiane degli spostamenti incogniti si riducono così in numero ad esser solo tante, quante sono le file dei nodi nelle tre direzioni x, y, z pur restando generalmente gli spostamenti vettorali differenti da nodo a nodo.

È opportuno far notare che il sistema di equazioni (6) e (7) si può decomporre così:

1) le equazioni (6) e (7) scritte rispetto all'asse x nelle quali compaiono come termini noti, i momenti d'incastro perfetto M_x; esse contengono come incognite, oltre le rotazioni φ, le componenti di spostamento **S** ed s;

2) le equazioni scritte rispetto all'asse y che contengono gli spostamenti S ed s;

3) le equazioni rispetto a z, che contengono **S** ed S.

---

[1]) Per S_{1*} si intende lo spostamento relativo nel piano verticale e secondo y, delle aste dirette come l'asse y della fila passante per 2 rispetto a quelle passanti per 1 (come $5 \cdot 1 - 1 \cdot 4$); ricordando che, data l'indeformabilità assiale delle aste, fra i nodi corrispondenti di due file parallele le componenti di spostamento sono eguali. Analogamente S_{14} sarà misurato nel piano verticale e nella direzione z.

Questa osservazione può riuscire utile nella risoluzione per iterazione del sistema di equazioni (6) e (7).

Se si ritengono nulli gli spostamenti verticali s la risoluzione del sistema di equazioni (6) e (7) si semplifica ulteriormente, poichè, dei tre sistemi parziali,

il primo conterrà soltanto le incognite $\varphi, \mathbf{S}$;

il secondo conterrà ψ, S;

il terzo conterrà $\vartheta, \mathbf{S}, S$.

Per un telaio simmetrico, simmetricamente caricato, senza maglie a sbalzo o comunque tale da avere trascurabili o nulli gli spostamenti nei nodi, sono da ricercarsi soltanto le rotazioni dei nodi (in tal caso bastano le (6) a risolvere completamente il problema); ed inoltre, essendo nulli gli spostamenti $S, \mathbf{S}, s$, i tre sistemi di equazioni (6) (in φ, in ψ, in ϑ) si risolvono separatamente, essendo collegati l'uno all'altro soltanto dalle incognite S, $\mathbf{S}$, s.

Questo risultato è di evidente ed interessante significato fisico.

f) Ottenuti (come è stato indicato) i valori delle componenti della rotazione ed (eventualmente) degli spostamenti dei singoli nodi, si può risalire, mediante le 1, 2, 3 alla conoscenza di tutti i momenti incogniti, in ogni sezione della struttura in esame.

g) Noti i momenti alle estremità delle singole aste, si può assai facilmente, risalire alle reazioni nei nodi utilizzando note relazioni della statica.

h) Note le rotazioni (assolute) e gli spostamenti (relativi) dei vari nodi si può disegnare l'andamento generale della deformazione di tutto il telaio, utilizzando i metodi che si impiegano di solito per i telai piani per determinare le deformazioni dei vari telai piani che compongono il telaio spaziale in esame; ed applicando in modo ovvio il principio della sovrapposizione degli effetti e le opportune operazioni di geometria descrittiva.

Si tenga presente che occorre al solito prefissare una convenzione per il segno delle componenti delle rotazioni e dei momenti che si introducono nelle equazioni da (1) a (7).

Nelle nostre formule abbiamo considerato come positivi le rotazioni e i momenti che concordano in verso con la rotazione delle lancette dell'orologio; il segno dei momenti sarà quello dei momenti trasmessi dai nodi alle travi.

BIBLIOGRAFIA

C. L. Ricci — *L'ellisse di elasticità trasversale.* Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, gennaio 1911.

Craemer — « *Der durchlaufende Balken auf torsionfesten Unterzügen* », Bauing. 1925, pag. 954.

Reisinger — *Berechnung eines Kühlturmunterbaues als raümliches Stubwerk.* Bauing, 1926, pag. 350.

A. Millies — *Raümliche Vieleckrahmen mit eingespannten Füssen.* Berlin, 1927.

O. Belluzzi — « *Formule per il calcolo dei portali incastrati* ». Bologna, 1930.

A. Giannelli — « *Lezioni sui telai elastici piani* ». Roma, 1932.

L. Massei — « *Sul calcolo dei telai a più piani* ». Annali dei Lavori Pubblici, aprile 1932, pag. 337.

R. Schwarz — « *Zur Berechnung prismatischer Turmskelettkonstruktionen nach dem Formänderungsverfahren* ». Beton und Eisen, 1934, pag. 252.

Sobrero — « *Nuovo teorema dei 6n momenti per lo studio delle strutture reticolari piane e gobbe* ». L'Ingegnere, 1935, p. 497.

A. Scherenziss — « *Berücksichtigung der raümlichen Tragwirkung von Eisenbetonkonstruktionen* ». Beton und Eisen, 1936, p. 121.

M. Baroni — « *Le ossature degli edifici. - Telai piani multipli* ». Milano, 1937.

L. Broglio — « *Introduzione di un nuovo e generale principio di equivalenza per lo studio delle strutture elastiche* ». Atti di Guidonia, N. 10, aprile 1939.

Equazioni differenziali e funzioni metageometriche

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942-XX)

Sunto. — Si prende in esame una generalizzazione delle funzioni ipergeometriche e si forma l'equazione differenziale da essa soddisfatta.

Viene messo in rilievo la connessione fra tale ricerca ed una precedente dell'A. sulle equazioni differenziali.

D'altro canto le stesse ricerche si possono connettere ad altre, recentemente qui sviluppate, sui coefficienti binomiali.

1. La teoria delle funzioni ipergeometriche ha un suo sviluppo organico e compatto: da un lato esse includono moltissime delle trascendenti elementari; d'altro lato esse risolvono certe equazioni differenziali del secondo ordine ed infine si ricollegano — come espressione e come proprietà — alla teoria di certi integrali definiti che risolvono quelle equazioni.

La loro formazione è suscettibile di vasti e notevoli ampliamenti; e varie sono state le generalizzazioni.

Però tutta una classe di proprietà nuove, più intimamente colleganti le funzioni che definiremo, sorge sempre che si abbandoni (generalizzandola opportunamente) la presenza dei fattoriali al denominatore.

2. Noi chiameremo «*funzione metageometrica di ordine r*» la funzione analitica definita dalla serie:

$$G_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{(r)} x^n$$

allorchè fra le $\Omega_n^{(r)}$ sussiste la relazione ricorrente:

$$\Omega^{(r)}_{n+1} = \Omega^{(r)}_{n} \frac{(a_1+nh_1)\ldots(a_r+nh_r)}{(b_1+nk_1)\ldots(b_r+nk_r)}\,;\ \Omega_0^{(r)} = 1$$

Se vogliamo controdistinguere funzioni diverse spettanti a diversi sistemi di valori delle $a, h; b, k$, segneremo:

$$G_r\left(\begin{pmatrix} a & ; & h \\ b & ; & k \end{pmatrix}_r, x\right) \quad \text{oppure} \quad G\begin{pmatrix} a_1, h_1 ; a_2, h_2 ; \ldots ; a_r, h_r \\ b_1, k_1 ; b_2, k_2 ; \ldots ; b_r, k_r \end{pmatrix}; x\Big)$$

Si vede subito che se qualcuna delle h fosse zero nella formula di ri-

correnza stabilita per le Ω si staccherebbero dei fattori fissi, quelli relativi alle a con gli stessi indici; e se invece fosse zero qualcuna delle k, si staccherebbero fattori analoghi ma dati dai reciproci delle corrispondenti b. Inglobiamo questi fattori nella x; pertanto diremo che una funzione metageometrica d'ordine r è *regolare*, se tutte le h e k non sono nulle; diremo che è *speciale* ρ volte con $\rho \leq r$ se ρ delle h sono nulle, diremo che è *singolare* ρ volte, con $\rho \leq r$, se ρ delle k sono nulle, Si intende che le speciali, nella formula di ricorrenza hanno $r - \rho$ fattori al numeratore ed r al denominatore; e per quelle singolari avviene il reciproco.

È sin troppo evidente che:

I. *Il raggio di convergenza delle serie che dànno funzioni regolari è* 1;

II. *Quello delle funzioni speciali è* ∞; *quelle delle funzioni singolari è zero.*

Se $\rho = r$ si hanno le funzioni totalmente singolari o totalmente speciali:

$$1 + a_1 a_2 \ldots . a_r x + a_1(a_1+h_1)\, a_2(a_2+h_2) \ldots . a_r(a_r+h_r)\, x^2 + \ldots .$$

$$1 + \frac{x}{b_1\, b_2 \ldots . b_r} + \frac{x^2}{b_1(b_1+k_1)\, b_2(b_2+k_2) \ldots . b_r(b_r+k_r)} + \ldots .$$

La proprietà nuova e fondamentale di queste funzioni — (che comprendono le ordinarie ipergeometriche per $r=2$, e $h_1=h_2=k_1=h_2=1$, e $b_1=1$) è che:

La composizione (secondo HADAMARD-PINCHERLE) *di due funzioni di ordine* r *ed ordine* s, *dà una funzione di ordine* r + s.

Qui intendiamo per composizione secondo *H-P* la formazione di una serie di potenze i cui coefficienti sono i prodotti di quelli omologhi in due serie date di potenze [1]; e come abbiamo visto altrove, ciò equivale ad operare una composizione di tipo complesso:

$$\int G_r\left(\frac{x}{t}\right) \cdot G_s(t)\, \frac{dt}{t}$$

esteso l'integrale ad un opportuno cammino chiuso.

Reciprocamente, e come conseguenza si ha l'altro teorema: *Una qualsiasi funzione metageometrica di ordine* r *si può sempre ottenere componendo in modo* H-P, r *funzioni metageometriche di primo ordine.*

Ciò importa proprietà gruppali importantissime; poichè le funzioni

---

[1]) Per questa proprietà e per altre, molto analoghe, relative alle equazioni differenziali soddisfatte, confrontare con G. ANDREOLI: *Sovra alcune notevoli conseguenze per la teoria delle equazioni differenziali lineari etc.* Giornale di Matem. di BATTAGLINI. Napoli. 1926. — *Sull' equazione di* STIEFEL *ed altre analoghe*, questi Rendiconti, quest'anno.

metageometriche di ordine r soddisfano ad un particolare tipo di equazioni differenziali lineari a coefficienti polinomi di ordine r, tale teorema ci permette di asserire che l'integrale generale si ottiene da quelle di primo ordine con r quadrature opportunamente eseguite.

3. Pertanto, a base della teoria figureranno le funzioni metageometriche di I ordine; cioè, se si parla di quella regolare:

$$G_1(x) = c\left(1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+h)}{b(b+h)}x^2 + \dots\dots\right)$$

Si intende bene che valgono le seguenti proprietà immediate:

$$G\left(\begin{matrix} ta, th \\ b, k \end{matrix}; x\right) = G\left(\begin{matrix} a, h \\ b, k \end{matrix}; tx\right)$$

$$G\left(\begin{matrix} a, h \\ tb, tk \end{matrix}; x\right) = G\left(\begin{matrix} a, h \\ b, k \end{matrix}; \frac{x}{t}\right)$$

In quanto alla convergenza, si può subito (come si è detto in generale) osservare che se k ed h sono diversi da zero, il raggio di convergenza è 1; se $k = 0$ ed $h \neq 0$, il raggio è zero, ed in tal caso occorre procedere (come in tutti quelli analoghi che potremo incontrare) ad applicare metodi di sommazione; se $k = 0$, $h \neq 0$, il raggio di convergenza è infinito; e se infine $k = h = 0$, la funzione si riduce alla serie geometrica, con raggio di convergenza eguale a $\left|\frac{b}{a}\right|$.

Se vogliamo esaminare a quale equazione differenziale soddisfa la G_1, introduciamo l'operazione $\Theta f = x f'$; e formiamo l'operatore:

$$x(h\Theta + a) - (k\Theta + b - k) - \Gamma_1$$

ed applichiamolo a G_1.

Avremo ovviamente:

$$\Theta G_1 = \Theta c\left(0 + \frac{a}{b}x + \frac{a\cdot(a+h)}{b(b+k)}2x^2 + \frac{a\cdot(a+h)(a+2h)}{b(b+k)(b+2k)}3x^3 + \dots\dots\right)$$

Quindi avremo:

$$h\,\Theta\,G_1 + a\,G_1 = \sum_0^\infty (\Omega'_n\, n\,h + \Omega'_n\, a)x^n = \sum_0^\infty \Omega'_n\,(a + nh)\,x^n$$

mentre, per ovvia analogia, avremo anche:

$$k\,\Theta\,G_1 + (b - k)\,G_1 = \sum_0^\infty \Omega'_n\,(b + (n-1)\,k)\,x^n$$

Riunendo vediamo che l'operatore:

$$x(h\,\Theta + a) - (k\,\Theta + b - k) = \Gamma_1$$

applicato a G_1 porta:

$$\Gamma_1(G_1) = x\sum_0^\infty \Omega'_n (a+nh)\,x^n - \sum_0^\infty \Omega'_n (b+(n-1)\,k)\,x^n =$$

$$= \sum_0^\infty \Omega'_n (a+n\,h)\,x^{n+1} - \sum_0^\infty \Omega'_n\, b+(n-1)\,h)\,x^n =$$

$$= \sum_1^\infty \Omega'_{n-1}(a+(n-1)h\,x^n - \sum_0^\infty \Omega'_n (b+(n-1)\,k)\,x^n =$$

$$= k-b+\sum_1^\infty [\Omega'_{n-1}(a+(n-1)h) - \Omega'_n (b+(n-1)k]x^n.$$

Ma, dalla stessa definizione la differenza entro parentesi quadre è nulla; dunque vale il teorema:

La funzione metageometrica di primo ordine regolare, speciale, o singolare soddisfa l'equazione differenziale lineare di primo ordine:

$$\Gamma_1 y = x\,(h\,\Theta + a)\,y + (k\,\Theta + b - k)\,y = a - b;$$

cioè, esplicitamente, alla:

$$(hx + k)\,x \cdot y' + (ax + b - k) = k - b$$

Si osserva che l'equazione diventa omogenea solo se $k = b$, e se quindi al denominatore figurano — fatte le riduzioni — solo fattoriali.

4. Se vogliamo l'espressione di $G_1(x)$, regolare, mediante un integrale definito, cominciamo con l'osservare che la funzione metageometrica G_0 regolare di ordine 0 non è altro che la serie geometrica.

E per una proprietà generale che risulterà confermata e sviluppata in seguito, cerchiamo di ottenere $G_1(x)$ da $G_0(x)$ mediante l'operazione:

$$G_1(x) = \int_0^\rho z^\lambda\,(\rho - z)^\mu\, G_0(zx)\,dz$$

Orbene, essendo $G_0 = 1 + zx + z^2x^2 + \ldots\ldots = (1 - zx)^{-1}$, noi dovremo avere:

$$G_1(x) = \sum_0^{\infty} \Big(\int_0^{\rho} z^{\lambda} (\rho - z)^{\mu} z^n \, dz \Big) x^n$$

Perciò λ , μ , ρ dovranno essere determinati in modo tale che sia:

$$\int_0^{\rho} z^{\lambda} (\rho - z)^{\mu} z^{n+1} \, dz = \Omega'_{n+1} \; ;$$

e siccome

$$\Omega'_{n+1} = \Omega'_n \frac{a + n\,h}{b + n\,h} \qquad\qquad n = 0, 1 \ldots\ldots$$

occorre che λ , μ , ρ siano tali da permettere di soddisare identicamente questa relazione.

Dunque deve essere:

$$\text{I} \qquad \int_0^{\rho} z^{\lambda} (\rho - z)^{\mu} \, dz = 1 \cdot c$$

$$\text{II} \qquad \int_0^{\rho} z^{\lambda+n+1} (\rho - z)^{\mu} dz = \int_0^{\rho} z^{\lambda+n} (\rho - z)^{\mu} \, dz \cdot \frac{a + n\,h}{b + n\,k} \cdot$$

essendo c una costante arbitraria.

Orbene è facile verificare che, integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^{\rho} z^{\lambda+n+1} (\rho - z)^{\mu} dz = \frac{\mu+n+1}{\mu+1} \int_0^{\rho} z^{\mu+n} (\rho - z)^{\mu+1} dz = \frac{\lambda+n+1}{\mu+1} \int_0^{\rho} z^{\lambda+n} (\rho - z)^{\mu} (\rho - z) dz$$

il che porta a:

$$\int_0^{\rho} z^{\lambda+n+1} (\rho - z)^{\mu} dz = \frac{\mu+n+1}{\mu+1} \left\{ \rho \int_0^{\rho} z^{\lambda+n} (\rho - z)^{\mu} dz - \int_0^{\rho} z^{\lambda+n+1} (\rho - z)^{\mu} dz \right\}$$

Sicchè in definitiva si ottiene:

$$\int_0^{\rho} z^{\lambda+n+1} (\rho - z)^{\mu} dz = \frac{\rho(\lambda+n+1)}{\lambda+\mu+n+2} \int_0^{\rho} z^{\lambda+n} (\rho - z)^{\mu} dz$$

Ma se confrontiamo con la relazione ricorrente, si vede che deve essere identicamente per ogni n:

$$\frac{a + n\,h}{b + n\,k} = \rho \, \frac{\lambda + n + 1}{\lambda + \mu + n + 2} \; ,$$

e questa è soddisfatta se:

$$\rho = \frac{h}{k} \quad ; \quad \lambda = \frac{a}{h} - 1 \; ; \quad \mu = \frac{b}{k} - \frac{a}{h} - 1 \, .$$

Quindi resta fissata completamente l'espressione delle funzioni metageometriche di I ordine, attraverso la:

$$G_1(x) = \int_0^{\frac{h}{k}} z^{\frac{a}{h}-1} \left(\frac{h}{k} - z\right)^{\frac{b}{k}-\frac{a}{h}-1} (1 - zx)^{-1} \, dz \, .$$

Queste formole valgono per le funzioni regolari.

5. Possiamo ora impostare la teoria generale delle funzioni metageometriche.

Le proprietà generali, oltre quelle già date, si compendiano nelle:

I) *Una funzione metageometrica regolare di ordine* r *regolare si può ottenere da una di ordine* (r — 1), *anch' esso regolare, mediante l'operazione*:

$$G_r(x) = \int^{\rho} z^{\lambda} (\rho - z)^{\mu} \, G_{r-1}(zx) \, dz$$

II) *Una funzione* ρ *volte singolare* (*o* ρ *volte speciale*) *di ordine* r, *si può ottenere da una anche* ρ *volte singolare* (*o* ρ *volte speciale*) *di ordine* r — 1, *mediante la stessa operazione ora detta.*

III) *Una qualunque funzione metageometrica* (*regolare, speciale, o singolare*) *di ordine* r *soddisfa all' equazione differenziale*

$$\Gamma_r(G_r) = P_{r-1}(x)$$

dove $P_{r-1}(x)$ *è un polinomio di grado* r — 1, *e l' operatore differenziale* Γ_r *è definito da*:

$$\Gamma_r = x \left\{ (h_1 \Theta + a_1)(h_2 \Theta + a_2) \ldots\ldots (h_r \Theta + a_r) \right\} - \\ \left\{ (k_1 \Theta + b_1 - k_1)(k_2 \Theta + b_2 - k_2) \ldots\ldots (k_r \Theta + b_r - k_r) \right\} =$$

$$(x p_a + q^0) \Theta^r + (x p_1 + q_1) \Theta^{r-1} + \ldots\ldots + (x p_r + q_r) \, ,$$ con p_r, q_r dipendenti in modo razionale e simmetrico dalle a, b, h, k.

IV) *La stessa equazione differenziale, sviluppata* [2]), *assume la forma*:

$$x^r (u_0 x + v_0) y^{(r)} + x^{r-1} (u_1 x + v_1) y^{(r-1)} + \ldots\ldots + (u_r x + v_r) y = P_{r-1}(x).$$

con le u, v dipendenti in modo razionale e simmetrico dalle a, b, h, k.

---

[2]) Confronta la nostra Nota già citata.

Inoltre vi sono delle proprietà di omogeneità espreses da:

$$G_r\left(\begin{matrix} ta_1, th; \dots \\ b_1, k; \dots \end{matrix}; x\right) = G\left(\begin{matrix} a_1, h_1; \dots \\ b_1, k_1; \dots \end{matrix}; tx\right)$$

$$G_r\left(\begin{matrix} a_1, h_1; \dots \\ tb_1, tk_1; \dots \end{matrix}; x\right) = G\left(\begin{matrix} a_1, h_1; \dots \\ b_1, k_1; \dots \end{matrix}; \frac{x}{t}\right)$$

$$G_r\left(\begin{matrix} a_1, h_1; a_2, h_2 \dots \\ b_1, k_1; b_2, k_2 \dots \end{matrix}; x\right) = G\left(\begin{matrix} a_2, h_2; a_1, h_1; \dots \\ b_1, k_1; b_2, k_2; \dots \end{matrix}; x\right)$$

$$G_r\left(\begin{matrix} a_1, h_1; a_2, h_2 \dots \\ b_2, k_2; b_1, k_1 \dots \end{matrix}; x\right) = G\left(\begin{matrix} a_1, h_1; a_2, h_2; \dots \\ b_2, k_2; a_1, k_1; \dots \end{matrix}; x\right)$$

6. La prima delle proprietà enunciate è quasi immediata, dopo le relative alla funzione di primo ordine. Infatti, basta osservare che i coefficienti hanno le relazioni ricorrenti:

$$\Omega^{(r)}{}_{n+1} = \frac{(a_1+nh_1)\dots(a_{r-1}+nh_{r-1})(a_r+n_{(r)}h_r)}{(b_1+nk_1)\dots(b_{r-1}+nk_{r-1})(b_r+nh_r)} \cdot \Omega_n^{(r)}$$

$$\Omega_{n+1}^{(n-1)} = \frac{(a_1+nh_1)\dots(a_{r-1}+nh_{r-1})}{(b_1+nk_1)\dots(b_{r-1}+nk_{r-1})} \Omega_n^{(r-1)}$$

e quindi:

$$\Omega^{(r)}{}_{n+1} = \frac{a_r+nh_r}{b_r+nk_r} \Omega^{(r-1)}_{r+1}$$

Se dunque si effettua:

$$\int_0^\rho z^\lambda (\rho - z)^\mu G_{r-1}(zx)\, dz$$

si otterrà lo sviluppo:

$$\int_0^\rho z^\lambda (\rho - z)^\mu \sum_n^1 \Omega_n^{(r-1)} z^n x^n\, dz =$$

$$\sum_n \left[\Omega_n^{(r-1)} \cdot \int^\rho z^{\lambda+n} (\rho+z)^\mu\, dz \cdot \right] x^n$$

Ma, come si è visto per il caso delle funzioni di primo ordine, basta porre

$$\rho = \frac{h_r}{k_r};\ \lambda = \frac{a_r}{h_r} - 1;\ \mu = \frac{b_r}{k_r} - \frac{a_r}{n_r} - 1$$

per avere che quell'integrale diventi precisamente $\frac{a_r + n\,h_r}{b_v + n\,k_r}$, cioè proprio il fattore che fa diventare $\Omega_n^{(r-1)}$, l'$\Omega_n^{(r)}$.

Dunque è dimostrata la prima proprietà.

In quanto alla seconda, essa diventa egualmente una verifica: alquanto più complicata di quella per il primo ordine, ma non sostanzialmente diversa; e se poi si effettua lo sviluppo si trova anche la terza proprietà; dove il polinomio si determina facilmente con lo sviluppo stesso.

È chiaro poi che:

Una funzione totalmente singolare (o totalmente speciale) *di ordine* r *si compone sempone sempre con* r *funzioni singolari* (o speciali) *di primo ordine*; *una funzione singolare* (o speciale) ρ *volte, di ordine* r, *si compone sempre con una funzione regolare di ordine* $r-\rho$ *e con una totalmente singolare* (o speciale) *di ordine* ρ.

Quindi agli effetti della teoria, giocano come fondamentali le tre funzioni di primo ordine: la regolare, la singolare, la speciale; la prima risultando composta delle ultime due. Cioè:

$$\gamma(x) = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+h)}{b(b+k)}x^2 + \dots\dots \qquad = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\xi + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\xi^2 + \dots\dots$$

$$\alpha(x) = 1 + ax + a(a+h)x^2 + \dots\dots \qquad = 1 + \alpha\xi + (\alpha+1)\xi^2 + \dots\dots$$

$$\beta(x) = 1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b(b+h)} + \dots\dots \qquad = 1 + \frac{\xi}{\beta} + \frac{\xi^2}{\beta(\beta+1)} + \dots\dots$$

ove $\alpha = \frac{a}{h}$; $\beta = \frac{b}{k}$; ξ è rispettivamente $x\frac{k}{h}$, xh; $\frac{x}{k}$ nella prima, seconda, terza.

Ma, dal punto di vista delle singolarità, si presentano anche dei fatti notevoli; e cioè:

Tutte le funzioni metageometriche regolari hanno la sola singolarità $x = 1$.

Tutte le funzioni metageometriche speciali hanno la sola singolarità $x = \infty$.

Tutte le funzioni metageometriche singolari hanno la sola singolarità $x = 0$.

Infatti, queste sono le sole singolarità delle funzioni di primo ordine; e pertanto restano anche quelle per le funzioni di ordine superiore.

Il solo dubbio potrebbe sussistere per la $\alpha(x)$; ma osservando nella forma in ξ che essa, composta con l'esponenziale dà la funzione $(1-\xi)^{-\alpha}$, avente la sola singolarità 1 (mentre l'esponenziale ha l'infinito come singolarità) ne risulta necessariamente che la $\alpha(x)$ deve avere la singolarità solo nell'origine.

Le acque freatiche dei deserti conosciute ed utilizzate nell'antica India.

Nota del socio **Giuseppe De Lorenzo**

(pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1942 - XX)

Sunto. — In questa Nota è riprodotto e commentato un antico *Jâtaka* indiano, per mostrare, come già parecchi secoli prima dell'era volgare in India si conosceva l'esistenza di acque freatiche nel sottosuolo dei deserti e le si facevano scaturire con lo scavo di pozzi più o meno profondi.

Ora che l'Italia, ricalcando le antiche orme di Roma, sta sulle terre libiche, cirenaiche e marmariche a contatto dei deserti dell'Africa settentrionale, dal sottosuolo dei quali cerca di far scaturire, con opere mirabili, le acque freatiche indispensabili alla vita vegetale ed animale di quelle vaste e desolate regioni, può essere interessante conoscere quel che di tali acque sapevano e come le utilizzavano gli antichi popoli abitatori delle regioni desertiche e paradesertiche. Tra tali popoli i più noti e più prossimi a noi del bacino del Mediterraneo sono quelli della Mesopotamia e dell'Egitto, ai quali però la linfa vitale dell'acqua era ed è data dai grandi fiumi, il Tigre, l'Eufrate ed il Nilo, e sui quali quindi non è quì il caso di fermarsi. Voglio invece rapidamente accennare ad una grande regione, a noi meno vicina e meno nota, qual'è l'India, nella quale le recenti ricerche archeologiche hanno scoperto, nella valle dell'Indo, una civiltà coeva della niliaca e della mesopotamica: la cosidetta civiltà di Mohenjo-Daro, del quarto millennio prima di Cristo.

L'India però non è, come l'Egitto e la Mesopotamia, una regione piana e deserta, percorsa e vivificata solo dalle acque di grandi fiumi. L'India, invece, è, come si sa, la regione, che unisce in sè i maggiori contrasti esistenti sulla superficie della terra: le eccelse altezze del Himâlaya, con gelide cime, eminenti a quasi novemila metri sul mare, imminenti sugli infocati piani dell'Indo e del Gange; zone di piogge diluviali, quali in nessun'altra parte della terra, a contatto con altre, in cui non cade una goccia d'acqua; plaghe della più intensa vita vegetale ed animale, confinanti con aridi deserti. La costituzione fisica dell'India, con l'immenso baluardo del Himâlaya ed i monti del Dekkan contigui al caldissimo Oceano Indiano, determina il regime dei monsoni, con le conseguenze dei su accennati contrasti. Così avviene, per esempio, che nell'India nord-est, nell'Assam, nei soli tre mesi della stagione delle piogge, da

giugno ad agosto, cadono in media da dodici a tredici metri di pioggia, che a volte, come nell'anno 1861, giunsero fino a venti metri: con quali effetti, malefici e benefici, si può appena immaginare; mentre nell'India nord-ovest, del Panciab e del Sindh, si hanno appena, durante tutto l'anno, da trenta a cinquanta centimetri di pioggia, che evapora immediatamente sulla superficie ardente di quei deserti.

Date queste condizioni telluriche e climatiche, si comprende quale importanza abbia per gli Indi l'acqua, che è stata sempre per essi, dai tempi vedici ad oggi, oggetto del loro culto, della loro arte e delle loro applicazioni pratiche. Non è qui il caso di ricordare, che gli Indi per primi trovarono il sistema delle dighe e dei laghi artificiali, per imbrigliare le acque scendenti dal Himâlaya e largirle gradatamente ai piani assetati. Invece bisogna segnalare il pozzo, che raccoglie le acque freatiche e rappresenta il cuore del villaggio indiano: perchè l'India è un paese rurale per eccellenza, in cui non la città industriale, ma il villaggio rurale è la cellula fondamentale della sua vita economica, sociale e spirituale.

Il pozzo, dunque, per la raccolta delle acque freatiche, mi induce a ricordare qui un'antica descrizione, che di esso si trova nel secondo *Jâtaka*. Il *Jâtaka* è la fonte originaria, come fu già indicata dal Benfey, di tutta la novellistica europea ed asiatica, dalla greca e latina fino alla cinese ed alla giapponese. Nella sua forma attuale esso è la narrazione delle anteriori rinascite del Buddha, sotto ogni specie di forma vivente; ma è, in sostanza, un tesoro inesauribile di mille apologhi, conti, novelle, facezie, rapsodie, favole in versi, intessute con prosa, chiamato da Bühler il grande *Thesaurus* dell'antichità indiana quotidiana, e che è al tempo stesso la leggenda popolare del Maestro, che tutto conosceva, perchè tutto aveva in sè vissuto, nel corso di tempi innumerabili. La sua compilazione, quale ci è stata tramandata dal cànone pâli e come è stata tradotta da E. B. Cowell e dai suoi collaboratori nei sette volumi di *The Jâtaka, or Stories of the Buddha's former Births,* Cambridge, at the University Press, 1895-1913, può risalire al quarto secolo prima di Cristo; ma molte delle storie, in esso contenute, provengono dall'antichissimo *folk-lore* indiano, anteriore anche al Buddha.

Il secondo *Jâtaka*, dunque, intitolato *Vannupatha-Jâtaka*, o *Jâtaka del deserto di sabbia* racconta: «Una volta, quando Brahmadatta era re di Benâres, il Bodhisatta rinacque in una famiglia di mercanti. Quando fu grande, usava andare in giro per commercio con un convoglio di cinquecento carri. Ora una volta dovette attraversare un deserto largo sessanta leghe, di cui la sabbia era così fina, che se la si stringeva nel pugno, sfuggiva tra le dita. Ed appena sorgeva il sole, si riscaldava e scottava in modo, che non vi si poteva più camminare. Perciò, quelli, che dovevano attraversarlo, usavano viaggiare solo di notte. All'alba disponevano i loro carri in cerchio, con i buoi nel mezzo, e mangiavano, essi e gli ani-

mali, dando a questi il foraggio e preparando per sè il primo pasto con le legna da ardere, il riso e l'olio, portati sui carri. Durante il giorno riposavano all'ombra delle tende e dei carri, ed al tramonto, quando il suolo s'era rinfrescato, facevano il pasto della sera, aggiogavano i buoi ai carri e riprendevano il cammino. Viaggiare nel deserto era come viaggiare sul mare: ed un *pilota del deserto* guidava i convogli, dirigendosi con le stelle. Ed in tal modo il nostro mercante s'inoltrò in quel deserto. Ora, quando gli restavano solo sette miglia di esso da percorrere, egli pensò: Questa notte usciremo fuori da questo deserto. E così, dopo la cena, per alleggerire i carri e marciare più speditamente, fece gettare la legna e l'acqua, e diede l'ordine della partenza. Sul carro di punta sedeva il pilota, che dirigeva il convoglio, guardando le stelle. Ma quella notte egli era così stanco, che s'addormentò e non si accorse, che i buoi, non più guidati, ritornavano sui propri passi; così che, quando, poco prima dell'alba, si destò e, guardando le stelle, capì quel ch'era avvenuto, gridò: Girate i carri, girate i carri! Ma, appena i carri, girando, si furono di nuovo disposti in linea, spuntò il giorno e tutta la carovana gridò: Siamo di nuovo dove accampammo ieri; tutta l'acqua è finita, e noi siamo perduti! E, così dicendo, disgiogarono i buoi, stesero le tende e si gettarono disperati sotto l'ombra di esse e dei carri. Ma il Bodhisatta pensò: Se io cedo, periremo tutti! Quindi cominciò a perlustrare il terreno intorno, finchè scoprì alcuni ciuffi d'erba e pensò, che, se v'era erba, doveva esservi umidità nel sottosuolo. Allora ordinò, che si portassero le vanghe e si cominciasse a scavare in quel punto. Scavarono un pozzo d'una trentina di metri, ma nel fondo urtarono contro una roccia, sì che tutti si perdettero d'animo. Ma il Bodhisatta, sicuro, che sotto quella roccia doveva trovarsi l'acqua, discese in fondo al pozzo, applicò l'orecchio sulla roccia, ascoltò e sentì effettivamente il fluire dell'acqua. Allora risalì, chiamò un giovane valido e gli disse: Giovanotto, se tu cedi, periremo tutti. Forza, dunque, e coraggio! Scendi nel pozzo con questo piccone di ferro e rompi la roccia! Ed il giovane, obbediente all'ordine e risoluto ed animoso, mentre tutti gli altri avevano perduto il coraggio, discese in fondo al pozzo e cominciò a picconare la roccia, che ostruiva il corso dell'acqua, finchè essa si spezzò e sprofondò. E su sgorgò l'acqua e salì nel pozzo fino all'altezza di un albero di palma. E gli uomini e gli animali bevvero e mangiarono e si ristorarono, e col fresco della sera ripresero il cammino, dopo aver piantato una bandiera presso il pozzo, perchè servisse da segnale agli altri viandanti del deserto.» Ed il racconto si chiude con la morale: Come gli uomini di coraggio e costanza scavano nella sabbia, finchè trovano l'acqua anche nel deserto: così il savio, forte e costante, lotta senza tregua e senza debolezza, finchè ha trovato la pace nel suo cuore.

Ora si noti la semplicità e la precisione della descrizione del deserto in quest'antico racconto indiano. Il suolo ardente, per cui, come scrive

anche Kipling, i lupi si fanno pigliar vivi, piuttosto che posarvi i piedi; la sabbia impalpabile, che ad ogni alito di vento, si solleva in nembi accecanti, per cui, com'è detto in un altro *Jâtaka*, quando il vento spira di fronte il capocarovana marcia in testa al convoglio, e quando spira alle spalle, marcia in coda, per non perdere e non far perdere i contatti; e gli orribili miraggi, per cui un altro capocarovana poco prudente, illuso da un diabolico miraggio di vegetazione e d'acqua, fa gettare tutta la riserva d'acqua del suo convoglio, per giungere più presto a quell'oasi illusoria, e così perisce con tutta la sua carovana: sono tutte manifestazioni ed esperienze, che ora sono ben note ai nostri pionieri e militari dell'Africa settentrionale.

Ma la parte più interessante, per noi geologi moderni, è quella, in cui viene descritta la scoperta e l'estrazione dell'acqua freatica dal sottosuolo del deserto. In essa tutto è chiaro e scientifico: nulla vi è di miracoloso o di misterioso, che possa, per esempio, paragonarsi al miracolo di Mosè; il quale nel deserto del Sinai, per comandamento ed intervento di Dio, percosse, con la sua verga, la roccia di Horeb e ne fece scaturire l'acqua. Nel *Jâtaka* invece la scoperta dell'acqua è dovuta alla saggezza ed alla esperienza scientifica del capocarovana, e la sua estrazione si ottiene con lo sforzo coraggioso, tenace e costante del picconiere, che batte col duro ferro contro la dura roccia impermeabile, che impedisce il sorgere dell'acqua. Perchè la salvezza, sia fisica che morale, degli uomini si ottiene solo col coraggio, la fede e la costanza. La vita è una continua guerra, fuori e dentro di noi: si deve lottare senza tregua. Meglio combattendo morire, che vivere vinti.

Intorno all'età dei fossili rinvenuti nei materiali vulcanici del golfo di Napoli.

Nota del dott. **Giuseppe Mirigliano,** *presentata dal socio* **G. De Lorenzo**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Alcune applicazioni del carattere della gonalità delle curve algebriche

Nota del prof. **Federico Amodeo**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX).

Sunto. — Premesse due osservazioni sopra la serie supplementare della serie minima g_k^1 ed un teorema, si dimostra che le curve di ordine m e di genere p sono classificabili in diversi tipi ben precisabili di differenti gonalità, che in generale non sono trasformabili birazionalmente fra loro con trasformazioni birazionali di tutti i punti dei loro piani, pur non tenendo conto della sovrabbondanza dei punti doppi della curva per rispetto ai sistemi di curve aggiunte di ordine minimo. Ciò fa intravedere una via che forse potrà far pervenire alla possibilità della classificazione definitiva della infinita moltitudine di curve di tutti i generi e di tutti gli ordini.

1. In una Nota, pubblicata nel Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania [1]), abbiamo fatto vedere, con un caso particolare, come la *gonalità* possa essere utilizzata a distinguere le curve dello stesso genere (di un determinato ordine m) in categorie che, in generale, non sono trasformabili birazionalmente l'una nell'altra, con trasformazioni cremoniane ed abbiamo fatto notare quanto l'argomento sia degno di studio e capace di proficue ricerche, che possono diradare la fitta nebbia che copre una possibile classificazione di tutte le curve algebriche. Qui vogliamo far vedere che il carattere della *gonalità* si presta (più di quanto abbiano fatto finora i *moduli* della curva introdotti da B. Riemann) a distinguere le curve di uno stesso genere in grandi categorie che in generale non sono trasformabili birazionalmente fra loro, pur essendo tutte riducibili a curve piane dello stesso numero di punti doppi.

Queste categorie, per le curve di ordine m sono in numero di $m - 1$, ma possono a loro volta suddividersi in altre sottocategorie, quando si tenga conto della diversità dei punti multipli ed ancora in altre sottocategorie quando si tenga conto anche della sovrabbondanza dei punti doppi della curva per rispetto alle curve aggiunte minime che esse possono avere.

2. Per semplificare quanto andremo ad esporre premettiamo le due seguenti *osservazioni* e un *teorema*.

---

[1]) Amodeo F., *Le curve* C_6^7 *di ordine sette e di genere sei.* Boll. Acc Gioenia, Serie III, Fasc. 17, 1941, p. 27-38.

a) **Osserv. 1ª.** È noto che le curve aggiunte minime della curva ${}_kC_p^m$, di ordine m, genere p, gonalità k, sono dell'ordine $m-k-1$ e quando esistono, rendono collineari i gruppi G_k della serie g_k^1; quindi la retta che contiene un gruppo G_k determina un altro gruppo G_{m-k} di una serie g_{m-k}^1 di ordine $m-k$, di egual dimensione della prima e dello stesso inviluppo.

Questo serie g_{m-k}^1 la diremo, per brevità di linguaggio, *serie supplementare* della serie g_k^1. Essa è unica se unica è la g_k^1.

In particolare per $m=2k$, come avviene per le curve ${}_kC_{(k-1)^2}^{2k}$, *k-gonali di 2ª specie* [2]), la serie supplementare delle g_k^1 è un'altra g_k^1.

Non deve essere $m<2k$, poichè la serie supplementare riuscirebbe di ordine minore di k e quindi la gonalità della curva passerebbe da k ad $m-k$, il che è assurdo, essendo k un minimo. In questo caso diremo che le curve stesse sono *supplementari* fra loro.

b) **Osserv. 2ª.** *In una curva k-gonale* ${}_kC_p^m$ *dotata di un punto multiplo* V^{m-k} *di multiplicità* $m-k$ *e di* $1,2,3,\ldots,t$ *punti* $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_t$ *di multiplicità* k, *l'inviluppo delle rette che segano i gruppi* G_k *della serie* g_k^1 *(che caratterizza la gonalità) riducesi ad* s *fasci lineari che hanno per centri i punti* $V,P_1,P_2,P_3\ldots P_t$ *e perciò è di classe* $s=1+t$.

Consideriamo dapprima il caso di $m-k>k$. Le rette del fascio (V) segano sulla curva la serie g_k^1 di gruppi di punti distinti (in generale), mentre le rette di ogni fascio (P) segano la curva in k punti riuniti in P e perciò segano su di essa gruppi G_k di punti riuniti in un solo e tutte inviluppano il fascio (P). Le stesse rette segano la *serie supplementare* di ordine $m-k$; ma quelle del fascio (V) segano la serie costituita di punti G_{m-k} riuniti nel punto V e quelle dei fasci (P) segano i gruppi G_{m-k} di punti distinti. Dall'ipotesi che sia $m-k>k$, la esistenza della serie g_{m-k}^1 non intralcia la gonalità della curva. Se il numero dei punti P è t, l'inviluppo delle rette che segano la g_k^1 e la g_{m-k}^1 è di classe $s=1+t$ ridotto ad s fasci lineari.

Quando $m-k=k$ e quindi $k=\frac{m}{2}$, la serie supplementare diviene di ordine eguale a quello della g_k^1 e la curva ${}_kC_p^m$ ha 2 g_k^1 sostenute dalle stesse rette che insieme costituiscono l'inviluppo di 2^a classe.

---

[2]) Amodeo, *Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie*, Ann. di Mat. 1895, v. 23, § 3, n. 7, p. 12. La *specie* di una curva k-gonale è uguale alla classe dell'inviluppo delle rette che segano la g_k^1 e si indica con s.

Le curve qui considerate, se non hanno altri punti multipli, oltre quello di V e dei t punti P o dei loro equivalenti, hanno il genere

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \frac{k(k-1)}{2}(s-1) = \frac{k-1}{2}(2m-ks-2)$$

e già sappiamo che esse sono di *specie s* perchè l'inviluppo delle rette che segano la g^1_k, considerato irreduttibile, è di classe $s = 1 + t$ [3]; ora conchiudiamo che ciò avviene anche quando l'inviluppo riducesi in fasci lineari.

c) **Teor.** *Ogni curva* ${}_k C^m_p$ k *gonale, di ordine* m *e di genere* p, *che ha per inviluppo delle rette che segano la* g^1_k *una curva di classe* $s = 1 + t$, *si può trasformare univocamente in una curva dello stesso ordine con un punto* V^{m-k} *di multiplicità* m − k, *con* t *punti* k*-upli ed altri eventuali punti di multiplicità inferiori a* k.

La dimostrazione di questo teorema fu da noi data fin dal 1900 ed è inutile qui ripeterla [4],

Da questo teorema si deduce che quello che andiamo ad esporre riguarda, non solo le curve che daremo come esempii, ma tutte le curve dello stesso ordine, genere e gonalità che ad esse si possono riferire univocamente nel modo indicato dal teorema steeso.

Il genere di queste curve, se esprimiamo con θ il numero dei punti doppi equivalenti ai punti di multiplicità inferiori a k, è

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-ks-2) - \theta .$$

Se $\theta = 0$ le curve sono di *specie s* con *serie canonica minima* priva di punti fissi e queste le diremo d'ora in poi *tipiche di specie s*; se $\theta \neq 0$ le curve pure sono di *specie s*, ma avranno nella serie canonica punti fissi, queste le diremo *di specie s atipiche.*

Con quanto andiamo ad esporre si solleva un altro piccolo lembo del fitto velo che ricopre le proprietà comuni a tutte le curve di tutti gli ordini; ed un altro piccolo passo si compie verso la conquista della conoscenza di questo argomento, che è fondamentale per la Geometria delle curve algebriche.

3. Per riuscire più possibilmeute chiaro su quanto andremo ad esporre, prenderemo come esempio delle curve di ordine pari le curve di

---

[3]) Amodeo, *Il problema della gonalità*, Rend. Acc. Napoli, 1941, § 5, n. 5, però questo teorema fu da noi enunciato fin dal 1893.

[4]) Amodeo, *Curve di gonalità* k *con punti fissi nella* (k − 1)*esima serie canonica*. Rend. Acc. Napoli. 1900, 7/8.

ordine *otto* e come esempio delle curve di ordine dispari le curve di ordine *sette*.

4. Le curve C^8 possono essere di 22 generi da 21 a 0, se ci limitiamo, come qui espressamente facciamo, alle sole curve irreducibili.

Di queste curve esamineremo i 7 gruppi, indicati dal teorema del n. 9 del § 1 della nota [3]), che variano dalla gonalità 7 alla gonalità uno.

5. La curva $\mathbf{C}^8_{21}$ è priva di punti doppi e di gonalità 7 con ∞^1 g^1_7 segate dai fasci di raggi che hanno per centri i singoli punti della curva (curve aggiunte di ordine zero). Essa è curva normale del piano di questa gonalità.

Essa è inoltre l'unica curva di ordine otto che non ammette gonalità diverse.

Gl'inviluppi delle serie g^1_7 sono di 1ª classe (ma sono eccezionalmente in numero infinito); essa è curva *tipica di 1ª specie*.

Se, teoricamente, vogliamo discendere da essa alla curva *7-gonale di 2ª specie* dobbiamo diminuire il genere di $\frac{k(k-1)}{2} = 21$ unità e si giunge alla curva C^8_0 (razionale).

Per essere $8 < 14$ la C^8_0 è soltanto la *curva supplementare* di C^8_{21}, qualora sia provvista di un punto V^7 di multiplicità 7, dal quale è determinata la serie g^1_1 supplementare di g^1_7; ciò vedremo meglio in seguito nel n. 11, 6°.

Osserviamo, una volta per sempre, che le altre curve C^8 di generi minori, senza essere *7-gonali*, hanno sempre ∞^1 g^1_7; per semplificazione escludiamo queste serie dalle successive considerazioni.

6. Le curve del secondo gruppo $\mathbf{C}^8_{20}$, $\mathbf{C}^8_{19}$ sono provviste rispettivamente di 1 e di 2 punti doppi.

1.° La $\mathbf{C}^8_{20}$ è 6-*gonale tipica di 1ª specie*; le sue curve agg. minime sono le rette del fascio di raggi che ha per centro l'unico punto doppio V^2 e sega la g^1_6 che è semplice. La serie supplementare della g^1_6 è la g^1_2 inviluppata dalle stesse rette e costituita dai punti G_2 di punti riuniti in V^2.

Per discendere dalla ${}_6C^8_{20}$ di 1ª specie alla C^8 6-*gonale di 2ª specie* bisognerebbe diminuire il genere di $\frac{k(k-1)}{2} = 15$ unità e si perviene alla C^8_5 con 16 punti doppi, ma, per essere $8 < 12$, questa C^8_5 è soltanto la *curva supplementare* di C^8_{20}, qualora sia provvista di un punto V^6 e di un punto doppio D, come si vedrà nel n. 10, 5°.

2.° La curva $\mathbf{C}^8_{19}$ con due punti doppi V, V' ha un'unica retta aggiunta

che sega una g_4^0 ma è pure *esagonale* per le due g_6^1 segate dai fasci (V), (V'). Queste due serie sono l'una residua dell'altra rispetto alla g_{12}^8 segata dalle C^2 agg.; le quali, se sono costrette a passare per due punti P, P' allineati con V' si spezzano nella retta $V'PP'$ fissa e in una retta variabile che passa per V e sega la curva C_{19}^8 in sei punti variabili e distinti e in due punti riuniti in V.

L'inviluppo di ciascuna delle g_6^1 è di 1ª classe e come tali devono essere considerati; perciò queste curva è *atipica di 1ª specie*.

7. Le curve del 3° gruppo $\mathbf{C_{18}^8}$, $\mathbf{C_{17}^8}$, $\mathbf{C_{16}^8}$:

1.° se sono provviste soltanto di punti doppi in numero di 3, 4, 5 rispettivamente, sono 6-*gonali* e presentano 3, 4, 5 serie g_6^1 segate dai fasci di raggi che hanno i centri nei loro punti doppi. Le serie g_6^1 segate su di esse sono: per la C_{18}^8, parti della g_{18}^6 segata dalle C^3 agg. su di essa; per la C_{17}^8, parti della g_{24}^{10} segata su di essa dalle C^4 agg.; per la C_{16}^8, parti della g_{30}^{18} segata su di essa dalle C^5 agg.

Le curve agg. C^k segano rispettivamente una g_{10}^2, g_8^1, g_6^0 che non influiscono sulla gonalità.

2.° *a)* se sono provviste di un punto triplo V^3 e di 0, 1, 2 punti doppi rispettivamente, sono curve 5-*gonali* (pentagonali) con una sola g_5^1 la quale, tenendo conto delle serie segate dalle C^2 agg.,

è doppia per la C_{18}^8, $g_{10}^2 = 2g_5^1$

è semplice per la C_{17}^8, $g_8^1 = g_5^1 + g_3^0$ ma con 3 punti fissi, e non risulta segata dalle dette C^2 agg. per la C_{16}^8, essendo $g_6^0 = 2g_3^0$.

Per ritrovare la g_5^1 nella C_{16}^8 provvista dei punti multipli V^3, D, D' bisogna ricorrere allo C^3 agg. che segano la 3ª serie canonica g_{14}^3; poichè di esse quelle che sono costrette a passare per due punti P, P' allineati con VD si spezzano nella retta VD ed una conica; la quale, se è costretta a passare per un punto allineato con VD', si spezza nella retta VD' e in una retta variabile del fascio (V), che sega sulla C_{16}^8 la g_5^1 di gruppi di punti G_5 sciolti e 3 punti della serie supplementare riuniti in V^3.

b) La curva $\mathbf{C_{18}^8}$ è *pentagonale tipica di 1ª specie*; se da essa si vuol discendere alla curva *pentagonale di 2ª specie* bisognerebbe diminuire il genere di $\frac{k(k-1)}{2} = 10$ unità e si giunge alla C_8^8 con 13 punti doppi. Per essere $8 < 10$ questa curva è soltanto la *supplementare* di C_{18}^8, qua-

lora avesse oltre il punto di V^3 gli altri punti riuniti in un punto V^5, ma di ciò si vedrà meglio nel n. 10, 5°.

8. Le curve del 4° gruppo $C^8_{15}, C^8_{14}, C^8_{13}, C^8_{12}$:

1.° se sono dotate soltanto di punti doppi in numero di 6, 7, 8, 9 rispettivamente, sono 6-*gonali* con 6, 7, 8, 9 g^1_6, parti di serie di ordini più elevati. Non influiscono sulla gonalità le serie $g^3_{12}, g^2_{10}, g^1_8, g^0_6$ segate su di esse rispettivamente dalle curve C^3 agg.:

2.° *a)* se sono dotate di un punto triplo V^3 e di 3, 4, 5, 6 punti doppi indipendenti rispettivamente, sono *pentagonali* con una g^1_5 e con 3, 4, 5, 6 g^1_6 rispettivamente.

La C^8_{15} è curva pentagonale normale del piano e tutte sono di 1ª *specie atipiche.*

b) Ma possono avere 2 punti tripli V, V' e 0, 1, 2, 3 punti doppi e quindi $2\,g^1_5$ e 0, 1, 2, 3 g^1_6. Esse sono da considerarsi di 1ª *specie atipiche*, con $2\,g^1_5$ invece di una.

In queste curve le C^3 agg. si spezzano nella retta VV' e nelle coniche che passano semplicemente per V, V' e per gli altri punti doppi e segano rispettivamente le serie $g^3_{12}, g^2_{10}, g^1_8, g^0_6$.

c) La C^8_{12} può avere 3 punti tripli V, V', V'', nel qual case avrà $3\,g^1_5$ ed è sempre di 1ª specie atipica. In questo caso le C^4 agg. si spezzano nelle 3 rette $VV', V'V'', V''V$ e in una retta variabile che sega una g^2_8; e quindi, se è costretta a passare per uno dei punti V, sega la g^1_5 di punti sciolti e tre punti coincidenti in V^3.

In tutti questi casi le curve suddette sono *pentagonali*, ma sempre con differenti combinazioni di altre serie di ordini maggiori, ciò che costituisce motivo di non poterle ottenere l'una dall'altra con trasformazioni birazionali di tutti i punti del piano.

3.° *a)* Se sono dotate di un punto quadruplo V^4, possono avere 0, 1, 2, 3 punti doppi rispettivamente.

In questo caso la C^8_{15} è *tetragonale tipica di 1ª specie* ed ha una g^1_4 da considerarsi *tripla*, perchè la serie canonica minima segata dalle curve agg. minime C^3 (spezzate in tre rette) è una $g^3_{12} = 3\,g^1_4$.

Le altre curve $C^8_{14}, C^8_{13}, C^8_{12}$ hanno per serie minima

$$g^2_{10} = 2g^1_4 + g^0_2 \quad , \quad g^1_8 = g^1_4 + 2g^0_2 \quad , \quad g^0_6 = 3g^0_2$$

---

[5]) Cfr. la Nota [5]) § 6, 5.

quest'ultima essendo segata dalle tre rette VD, VD', VD''. Nella $\mathbf{C}^8_{12}$ con 3 punti doppi, oltre il punto V^4, la serie g^1_4 è segata dalle C^4 agg. che segano la 2ª *serie canonica* g^5_{14}, e si può vedere, con ragionamento analogo a quello del n. 7, 2.°, che una semplice infinità di esse si spezzano nel tre rette VD, VD', VD'' e nel fascio (V^4).

b) La $\mathbf{C}^0_{12}$ può avere anche un punto V^4 e un punto triplo T^3; in tal caso la serie minima segata della C^3 agg., è costituita da due rette VT che segano due punti fissi e da una retta variabile intorno a V^4 che sega la g^1_4.

Le C^8_{14}, C^8_{13}, C^8_{12} sono di 1ª *specie atipiche.*

c) Se dalla $\mathbf{C}^8_{15}$ *tetragonale tipica di 1ª specie* vogliamo discendere alla *tetragonale di 2ª specie*, bisogna diminuire il genere di 6 unità e si giunge alla C^8_9 con 12 punti doppi, la quale esiste effettivamente come tale, perchè $8 = 2k$, ed è già stata considerata come tale nella Mem. citata alla nota [2]) ove pure si osservava che i suoi 12 punti doppi devono appartenere ad una C^3 agg. e quindi hanno la sovrabbondanza $\rho_2 = 3$ e per conseguenza la sovrabbondanza delle C^4 agg. è $\rho_1 = 1$ e quindi sono ∞^3 e segano una g^8_8 [6]).

Per il teorema citato nel n. 2, questa curva è riferibile univocamente alla C^8_9 con due punti quadrupli V, V'; l'inviluppo di 2ª classe è dato dai due fasci (V), (V') e la serie supplementare è pure una g^1_4 costituita dai due fasci inviluppanti i gruppi di punti riuniti in V e V'.

La C^8_9 è *tetragonale tipica di 2ª specie.*

Diminuendo ancora di 6 unità il genere della curva C^8_9 si giunge alla curva C^8_3 con 18 punti doppi, la quale, se è dotata di 3 punti quadrupli V, V', V'', è curva *tetragonale di 3ª specie*; il suo inviluppo è ridotto ai tre fasci di raggi (V), (V'), (V''), e non avendo altri punti doppi è *tipica di 3ª specie.*

9. Le curve del 5.° gruppo $\mathbf{C}^8_{11}$, $\mathbf{C}^8_{10}$, $\mathbf{C}^8_9$, $\mathbf{C}^8_8$, $\mathbf{C}^8_7$:

1.° se sono dotate di punti doppi soltanto in numero di 10, 11, 12, 13, 14 rispettivamente, hanno altrettante g^1_6 e sono *esagonali*, nell'ipotesi che questi punti siano indipendenti;

2.° *a)* se sono dotate di un punto triplo V^3 e 7, 8, 9, 10, 11 punti doppi

---

[6]) Cfr. nella Mem. della nota [2]) il § 9 sulle curve $C^{2k}_{(k-1)^2}$ e § 4, come pure la prima colonna del quadro delle curve k-gonali di 2ª specie.

rispettivamente, sono *pentagonali* con una g_5^1 e posseggono inoltre 7, 8, 9, 10, 11 g_6^1 rispettivamente.

b) Ma possono avere 2 punti tripli V, V′ e 4, 5, 6, 7, 8 punti doppi.

c) Possono avere 3 punti tripli V, V′, V″ e 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi.

d) Possono le C_9^8, C_8^8, C_7^8 avere 4 punti tripli V, V′, V″, V‴ e 0, 1, 2 punti doppi.

Sempre esse sono *pentagonali* con 1, 2, 3, 4 g_5^1 e con eventuali g_6^1.

3.° *a)* Se sono provviste di un punto quadruplo V^4 e 4, 5, 6, 7, 8 punti doppi rispettivamente, sono *tetragonoli* con una g_4^1 e 4, 5, 6, 7, 8 g_6^1 rispettivamente.

b) La $\mathbf{C}_9^8$, se avrà oltre il punto V^4 i suoi 6 punti doppi riuniti in un altro punto quadruplo V′, diviene *tetragonale tipica di 2ª specie*, come abbiamo visto nel n. 8, 3.° *c)*.

c) Le curve $\mathbf{C}_8^8, \mathbf{C}_7^8$ possono avere due punti quadrupli e 1 o 2 punti doppi rispettivamente ed avranno 2 g_4^1 e 1 o 2 g_6^1 rispettivamente.

4.° *a)* Se sono dotate di un punto quintuplo V^5 e 0, 1, 2, 3, 4 punti doppi, sono *trigonali* con 1 sola g_3^1 e 0, 1, 2, 3, 4 g_6^1 rispettivamente.

Qui la serie minima segata dalle C^4 agg. è rispettivamente

$$g_{12}^4 = 4g_3^1, g_{10}^3 = 3g_3^1 + g_4^0, g_8^2 = 2g_3^1 + 2g_1^0, g_6^1 = g_3^1 + 3g_4^0, g_4^0 = 4g_1^0;$$

e quindi la g_3^1 è da considerarsi quadrupla nella C_{11}^8, tripla nella C_{10}^8, doppia nella C_9^8, semplice nella C_8^8 e si riduce a 4 punti fissi nella C_7^8. In quest'ultima la g_3^1 è segata dalla C^6 agg. quando si spezzano nelle quattro rette VD, VD′, VD″, VD‴ e nel fascio (V^5).

La $\mathbf{C}_{11}^8$ è *trigonale tipica di 1ª specie.*

b) In particolare la $\mathbf{C}_8^8$ col punto V^5 può avere i suoi tre punti doppi riuniti in un punto triplo T^3 ed in tal caso essa è *trigonale tipica di 2ª specie* con inviluppo di 2ª classe ridotto ai due fasci lineari $(V^5), (T^3)$. Per il teorema del n. 2, essa è riferibile univocamente alla curva C_8^8 con 13 punti doppi, che è stata già esaminata e costruita come curva trigonale di 2ª specie nella Mem. citata alla nota [2]) qualora abbia i 13 punti doppi di sovrabbondanza 1, cioè come punti base di un sistema triplo $[C^4]_3$ di curve aggiunte che segano la $g_6^2 = 2g_3^1$.

Questa curva C_8^8 con V^5 e T^3 si può anche dedurre dalla C_{11}^8 *trigonale*

tipica di 1ª specie; poichè per discendere da essa alla *trigonale di 2ª specie* si deve diminuire il genere di 3 unità e si ricade nella C_8^8 con V^5 e T^3.

c) Diminuendo ancora il genere di altre 3 unità della C_8^8 si discende alla C_5^8; la quale se è provvista di un punto V^5 e di due punti tripli T, T' è trigonale con inviluppo di 3ª classe ridotto a 3 fasci lineari, che segano la curva C_5^8, quello di V in gruppi G_3 distinti, e quelli di (T) (T') in gruppi di punti riuniti in T e T'.

Questa C_5^8 è *trigonale tipica di 3ª specie.*

d) Diminuendo ancora il genere di 3 unità si perviene alla C_2^8, la quale se è provvista del punto V^5 e di tre punti tripli T, T', T'', parrebbe dovesse essere trigonale con inviluppo di 4ª classe; ma invece (ciò avviene eccezionalmente per le curve iperellittiche) anche con questi punti multipli essa è *bigonale*, poichè le C^5 agg. ridotte alle tre rette VT, VT', VT'' e al fascio di coniche VTT'T'' segano la g_2^1 unica, che è caratteristica per le curve di genere 2.

10. Le curve del 6.° gruppo $C_6^8, C_5^8, C_4^8, C_3^8, C_2^8, C_1^8$:

1.° se sono provviste soltanto di punti doppi indipendenti in numero di

15, 16, 17, 18, 19, 20

rispettivamente, sono *esagonali* con egual numero di g_6^1, parti di serie di ordini maggiori;

2.° *a)* se sono provviste di un punto triplo V^3 e di altri

12, 13, 14, 15, 16, 17

punti doppi rispettivamente, sono *pentagonali* con altretante g_6^1 e una sola g_5^1.

b) Ma possono avere due punti tripli V, V' e dippiù 9, 10, 11, 12, 13, 14 punti doppi rispettivamente e quindi altretante g_6^1 e due g_5^1.

c) Possono avere 3 punti tripli V, V', V'' e 6, 7, 8, 9, 10, 11 punti doppi, quindi altretante g_6^1 e 3 g_5^1.

d) Possono avere 4 punti tripli V, V', V'', V''' e 3, 4, 5, 6, 7, 8 punti doppi, quindi altretante g_6^1 con 4 g_5^1.

e) Possono avere 5 punti tripli e 0, 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi, quindi altretante g_6^1 e 5 g_5^1.

f) Infine le ultime tre possono avere 6 punti tripli e 0, 1, 2 punti doppi, quindi altretante g^1_6 e 6 g^1_5.

Tutte queste curve sono sempre *pentagonali* in generale non trasformabili birazionalmente fra loro, pur essendo dello stesso genere, e trasformabili in curve dello stesso numero di punti doppi.

3.° *a)* Se sono provviste di un punto quadruplo V^4 ed altri 9, 10, 11, 12, 13, 14 punti doppi sono *tetragonali* con altretante g^1_6 e 1 sola g^1_4.

b) Ma possono avere un punto quadruplo V^4, un punto triplo T^3 ed altri 6, 7, 8, 9, 10, 11 punti doppi rispettivamente, ed allora avranno altretante g^1_6, 1 sola g^1_5 e 1 g^1_4.

c) Possono avere un punto quadruplo V^4, due punti tripli T, T′ ed altri 3, 4, 5, 6, 7, 8 punti doppi rispettivamente, ed allora avranno altretante g^1_6, 2 g^1_5 e 1 g^1_4.

d) Possono avere un punto quadruplo V^4, tre punti tripli T, T′, T″ ed altri 0, 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi rispettivamente, quindi avranno altretante g^1_6, 3 g^1_5, 1 g^1_4.

e) Possono le ultime tre $\mathbf{C}^8_3$, $\mathbf{C}^8_2$, $\mathbf{C}^8_1$ avere oltre il punto V^4 quattro punti tripli e rispettivamente 0, 1, 2 punti doppi ed avranno altretante g^1_6, 4 g^1_5, 1 g^1_4.

f) Possono, tutte le dette curve del gruppo, avere due punti quadrupli V, V′ e 3, 4, 5, 6, 7, 8 punti doppi rispettivamente ed allora avranno altretante g^1_6 e 2 g^1_4.

g) Possono avere 2 punti quadrupli V, V′ un punto triplo T^3 e 0, 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi rispettivamente, ed allora avranno altretante g^1_6, e g^1_5 e 2 g^1_4 come pure le ultime tre $\mathbf{C}^8_3$, $\mathbf{C}^8_2$, $\mathbf{C}^8_1$ possono avere 2 punti quadrupli, 2 punti tripli e 0, 1, 2 punti doppi rispettivamente, ed avranno oltre le g^1_6, 2 g^1_5 e 2 g^1_4.

h) Le ultime tre suddette possono anche avere 3 punti quadrupli V, V′, V″ e 0, 1, 2 punti doppi rispettivamente, ed avranno oltre le g^1_6, 3 g^1_4.

In tutti questi casi sempre le curve sono *tetragonali* con 1 o 2 o 3 g^1_4 ed altre serie g^1_5 e g^1_6 in modi diversi.

La $\mathbf{C}^8_3$ è *tetragonale di 3ª specie tipica* e si poteva ricavare dalla $\mathbf{C}^8_3$ *tetragonale di 2ª specie tipica*, già osservata nel n. 9, 3.° *a)* con la diminuzione di 6 unità nel genere.

4.° *a)* Se sono provviste di un punto quintuplo V^5 e di altri

5, 6, 7, 8, 9, 10

punti doppi rispettivamente, sono *trigonali* con altretante g^1_6 ed 1 sola g^1_3.

b) Ma possono avere un punto V^5 e un punto triplo T^3 e dippiù 2, 3, 4, 5, 6. 7 punti doppi rispettivamente ed allora avranno altretante g^1_6, 1 sola g^1_5 ed una sola g^1_3.

c) Possono avere le ultime cinque un punto V^5 e 2 punti tripli e dippiù 0, 1, 2, 3, 4 punti doppi rispettivamente ed allora avranno altretante g^1_6 e 2 g^1_3.

Fra esse la $\mathbf{C}^8_3$ è *trigonale di 3ª specie tipica*, come abbiamo già riscontrato nel n. 9, 4.° *c)*.

d) Le due ultime curve $\mathbf{C}^8_2$, $\mathbf{C}^8_1$ possono oltre il punto V^5 avere tre punti tripli e 0 o 1 punti doppi rispettivamente.

Si ritrova così la $\mathbf{C}^8_1$ apparentemente trigonale di 4ª specie, ma che invece è eccezionalmente *bigonale* come abbiamo già dimostrato nel n. 9, 4.° *d)*.

La $\mathbf{C}^8_1$ anch'essa presenta una eccezione; essa è segata dalle C^5 agg. spezzate in 3 rette ed una conica in g^0_0, ed allora le C^6 agg. riprendono la loro funzione, esse segano la g^7_8 *regolare* (cioè *non speciale*) che fornisce ∞^6 g^1_2.

5.° Se le curve del gruppo sono provviste di un punto sestuplo V^6 e rispettivamente di 0, 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi D, di cui due necessariamente non allineati con V, sono curve *bigonali* (iperellittiche). La serie g^1_2 è segata dalle rette di V ed è quintupla per la $\mathbf{C}^8_6$, perchè le C^5 agg. sono spezzate in cinque rette del punto V, che segano su di essa una $g^5_{10} = 5\ g^1_2$: e quadrupla per la $\mathbf{C}^8_5$; tripla per la $\mathbf{C}^8_4$; doppia per la $\mathbf{C}^8_3$; semplice per la $\mathbf{C}^8_2$; e si riduce a g^0_0 per la $\mathbf{C}^8_1$. In quest'ultima le g^1_2 sono date dalle C^6 agg. che si spezzano nelle 5 rette VI) e in una retta variabile, la quale se è costretta a passare per V descrive il fascio di raggi (V^6); ciascuno dei suoi raggi sega la curva in gruppi di 2 punti distinti e in gruppo di 6 punti coincidenti in V della serie g^1_6 supplementare di g^1_2.

Per la $\mathbf{C}^8_2$, si noti la eccezionalità sua che si riscontra anche nel fatto che quando essa è fornita di 19 punti doppi indipendenti e distinti le C^5 agg. segano l'unica sua g^1_2.

La curva $\mathbf{C}^8_6$ è *trigonale tipica di 1ª specie*; le altre curve $\mathbf{C}^8_5$, $\mathbf{C}^8_4$, $\mathbf{C}^8_3$, $\mathbf{C}^8_2$, $\mathbf{C}^8_1$ sono rispettivamente *bigonali di 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª specie* tutte *tipiche* e gli inviluppi relativi sono tutti ridotti a fasci lineari e forniti dal

fascio (V^6) per i gruppi G_2 di punti distinti, e dai fasci di raggi con i centri nei diversi punti doppi D che forniscono i gruppi di punti riuniti nel punto doppio [9]). Da una specie all'altra si passa diminuendo ogni volta di una unità il genere, cioè facendo acquistare alla curva un altro punto doppio D.

La C_3^8 avendo un punto V^6 e un punto doppio D ha per serie supplementare della g_2^1 la g_6^1 costituita di gruppi distinti del fascio (D) e di gruppi di punti riuniti in V^6 quindi è pure la *curva supplementare* della curva C_{10}^8 già notata nel n. 6, 1.° [7]).

II. Veniamo infine al 7.° gruppo formato delle curve di genere zero C_0^8 (curve *razionali* o *unicursali* o di *gonalità* 1).

Queste curve posseggono sempre $\infty^5 g_1^1$, perchè esse seno provviste di ∞^6 C^6 agg. che segano su di esse la serie g_6^6 e quindi per 5 punti arbitrarii della curva passa una C^6 agg. che sega una g_1^1.

Ma intanto:

1.° Se questa curva è provvista solo di punti doppi distinti, essa possiede pure 21 g_6^1 che sono parti di serie di ordine maggiore la g_{126}^{126} segata dalle curve di ordine 21 sulla C_0^8;

2.° *a)* se questa curva è provvista di un punto triplo V^3 e di altri 18 punti doppi distinti, presenta pure una g_5^1 e 18 g_6^1.

b) Può però avere due punti tripli V, V′ e altri 15 punti doppi e allora possiede oltre la g_1^1, 2 g_5^1 e 15 g_6^1.

c) Può avere tre punti tripli V, V′, V″ e 12 punti doppi e allora presenterà oltre le g_1^1, 3 g_5^1 e 12 g_6^1.

d) Può avere 4 punti tripli V e 9 punti doppi.

e) » » 5 » » V e 6 » »

f) » » 6 » » V e 3 » »

g) » « 7 » » V e quindi oltre le g_1^1, 7 g_5^1.

3.° *a)* Se essa è provvista di un punto quadruplo V^4 e 15 punti doppi;

b) oppure di un punto V^4 e 2, 3, 4, 5 punti tripli ed eventuali punti doppi;

c) oppure di due punti quadrupli V^4 e 9 p. doppi;

---

[7]) Si noti che la C_3^8 con 16 punti doppi è riportata nel quadro delle curve di 2ª specie per $R = 4$ (cfr. la nota [2]) § 8) ha ∞^4 C^5 che costituiscono un sistema che sega la $g_8^4 = 4\ g_2^1$ ed è ivi data anche la costruzione di questa curva con 16 punti doppi distinti.

d) oppure di 2 punti V e 1 o 2 o 3 punti tripli con eventuali p. doppi;
e) oppure di 3 punti V e 3 punti doppi;
f) oppure di 3 punti V e un punto triplo T;

essa possederà sempre, oltre le g^1_1, serie g^1_4, g^1_8, g^1_6 in maniere diverse, senza cessare di essere unicursale.

4.° *a)* Se essa è provvista di un punto quintuplo V^5 e altri 11 p. doppi; essa possederà, oltre le g^1_1, 11 g^1_6.

5.° *a)* Se essa è provvista di un punto sestuplo V^6 e 6 punti doppi;
b) oppure di un punto V^6 e di un punto triplo e 3 punti doppi;
c) oppure di un punto V^6 e di due punti tripli;

sempre la curva avrà oltre le g^1_1, g^1_2, g^1_3, g^1_6 in maniere diverse.

6.° Se infine la curva $\mathbf{C}^8_0$ possiede un punto V^7 settuplo, avrà nel fascio (V) il fascio che sega la g^1_1 da considerarsi *settupla* e non avrà le serie di ordini maggiori di uno, fatta eccezione delle serie g^1_7 segate dai fasci che hanno per centri tutti gli altri punti della curva.

Si ritrova così che questa curva è la *supplementare* della curva $\mathbf{C}^8_{21}$.

La curva C^8_0 con un punto V^7 non potrà trasformarsi in nessun delle altre curve unicursali esaminate innanzi.

12. Si può dedurre da queste rapide osservazioni che le curve *razionali* (che sono sembrate le più facili a studiare e che hanno *zero* moduli) sono quelle che hanno il maggior numero di categorie non trasformabili birazionalmente in generale fra loro con trasformazioni birazionali di tutti i punti del piano. Mentre le curve di *genere massimo*, che hanno 60 *moduli* costituiscono una sola categoria, e sono sempre *curve normali* del piano.

A questa conclusione che una curva razionale non si possa trasformare sempre in una retta con trasformazioni della curva che siano birazionali per tutti i punti del piano, come sono le trasformazioni cremoniane, mentre si può trasformare birazionalmente in una retta con trasformazioni birazionali dei soli punti della curva, giungono anche Enriques e Chisini [8]) ricorrendo faticosamente a quelle che essi chiamano *successive curve aggiunte* di ordine $m-3$ e ai loro generi *effettivi* e *virtuali*. Qui ci si arriva semplicemente e con grande evidenza, tenendo conto soltanto delle diverse serie semplicemente infinite che le curve possono avere oltre la serie minima g^1_k, le quali debbono di necessità riprodursi (perchè sono invariantive) per ogni trasformazione birazionale dei punti del piano della curva.

---

[8]) Cfr. Enriques e Chisini, *Teoria delle equazioni algebriche*, v. III p. 186.

13. Ciò che abbiamo mostrato per le curve di ordine *otto* si può ripetere analogamente per tutte le altre curve di ordine m pari, salvo a dover considerare un numero sempre crescente di categorie al crescere dell'ordine m.

14. Per le curve di ordine dispari le suddivisioni in categorie si avverano ugualmente, salvo che manca il caso delle due curve supplementari di eguali ordini.

Prendiamo ad esempio le curve di ordine *sette irreducibili* che possono essere di 16 generi da 15 a zero.

1.° La $\mathbf{C}_{15}^{7}$ è di gonalità 6 con ∞^1 g_6^1 ed è la curva *tipica di 1ª specie* di gonalità 6. La sua *supplementare* è la C_0^7 qualora sia provvista di un punto sestuplo V^6 (cfr. in seguito art. 6° *d*).

2.° Le curve del 2° gruppo $\mathbf{C}_{14}^{7}$, $\mathbf{C}_{15}^{7}$ sono provviste rispettivamente di 1 o 2 punti doppi V^2.

a) La C_{14}^{7} è *pentagonale tipica di 1ª specie* con una sola g_5^1 semplice segata dal fascio (V^2) dell'unico punto doppio. Da questa diminuendo il genere di 10 unità si trova la *supplementare* C_4^7 qualora sia provvista di un punto quintuplo V^5 e di un punto doppio D, che per la *serie supplementare* g_2^1 risulta essere *iperellittica di 2ª specie* (cfr. 5° *b*).

b) La curva $\mathbf{C}_{13}^{7}$ con due punti doppi V, V' ha 2 g_5^1 l'una residua dell'altra rispetto alla g_{10}^3 segata dalla C^2 agg. ed è *pentagonale di 1ª specie atipica.*

3.° Le curve del 3° gruppo $\mathbf{C}_{12}^{7}$, $\mathbf{C}_{11}^{7}$, $\mathbf{C}_{10}^{7}$:

a) se sono provviste di punti doppi soltanto in numero di 3, 4, 5 sono *pentagonali* con 3, 4, 5 g_5^1 segate dai fasci da raggi che hanno i centri nei loro punti doppi;

b) se sono provviste di un punto triplo V^3 e di 0, 1, 2 punti doppi rispettivamente sono *tetragonali* con una sola g_4^1 che è doppia per la $\mathbf{C}_{12}^{7}$, semplice per la $\mathbf{C}_{11}^{7}$. Nella C_{10}^{7} la g_4^1 è segata dalle curve agg. C^3.

La $\mathbf{C}_{12}^{7}$ è *tetragonale tipica di 1ª specie*; la tetragonale di 2ª specie dovrebbe essere la C_6^7 con un punto V^3 e un punto V'^3, ma questa è soltanto la *supplementare* sua (cfr. in seguito art. 4° *c*).

4.° Le curve del 4° gruppo $\mathbf{C}_{9}^{7}$, $\mathbf{C}_{8}^{7}$, $\mathbf{C}_{7}^{7}$, $\mathbf{C}_{6}^{7}$:

a) se sono dotate di soli punti doppi distinti e indipendenti in nu-

mero di 6, 7, 8, 9 rispettivamente sono *pentagonali* con 6, 7, 8, 9 g_5^1 rispettivamente [9]);

b) se sono dotate di un punto triplo V^3 e 3, 4, 5, 6 punti doppi distinti e indipendenti rispettivamente, sono *tetragonali* con altrettante g_3^1 e 1 sola g_4^1; ma possono avere 2 punti tripli V, V', e 0, 1. 2. 3 punti doppi rispettivamente; la $\mathbf{C}_6^7$ può avere 3 punti tripli V, V', V''; sempre sono *tetragonali* con 1, 2 o 3 g_4^1 ed altre serie g_5^1 in numero diverso, sicchè anche quelle dello stesso genere non sono, in generale, trasformabili fra loro;

c) se sono dotate di un punto quadruplo V^4 e 0, 1, 2, 3 punti doppi rispettivamente, sono *trigonali* in modi differenti. In questo caso la $\mathbf{C}_9^7$ è *trigonale tipica di 1ª specie*; da essa si discende alla *trigonale di 2ª specie anche tipica* $\mathbf{C}_6^7$ con un punto V^4 e un punto triplo T, la quale come abbiamo notato nel precedente art. 3° *b*) è pure la *supplementare* della C_{12}^7 tetragonale. Da questa si discende alla *trigonale di 3ª specie* C_3^7 quando sia dotata di un punto quadruplo V^4 e di due punti tripli T, T'.

5.° Le curve del 5° gruppo $\mathbf{C}_5^7, \mathbf{C}_4^7, \mathbf{C}_3^7, \mathbf{C}_2^7, \mathbf{C}_1^7$:

a) se sono provviste soltanto di punti doppi indipendenti in numero di 10, 11. 12, 13, 14 rispettivamente, sono *pentagonali* con egual numero di g_5^1;

b) se sono provviste di un punto triplo V^3 e di 7, 8, 9, 10, 11 punti doppi sono *tetragonali* con una sola g_4^1 e altrettante g_5^1. Ma possono avere 2 punti tripli V. V' e 4, 5, 6, 7. 8 punti doppi; oppure possono avere tre punti tripli V, V', V'' e 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi; le ultime tre $\mathbf{C}_3^7, \mathbf{C}_2^7, \mathbf{C}_1^7$ possono avere 4 punti tripli e 0, 1, 2 punti doppi; sempre esse saranno tetragonali in modi diversi con 1, 2, 3, 4 g_4^1 ed eventuali punti doppi, sicchè anche quelle dello stesso genere non sono in generale trasformabili fra loro birazionalmente;

c) se sono provviste di un punto quadruplo V^4 e 4, 5, 6, 7, 8 punti doppi indipendenti rispettivamente sono *trigonali* con altrettante g_3^1 e 1 sola g_3^1. Ma possono avere un punto quadruplo V^4, un punto triplo T e 1, 2, 3, 4, 5 punti doppi; le ultime tre possono avere un punto quadruplo V^4, due punti tripli T T' e 0, 1, 2 punti doppi; sempre esse sono trigonali in maniere differenti;

---

[9]) Bobek aveva notato che se la C_7^7 con 8 punti doppi ha le C^3 agg. che si segano in un 9° punto che appartiene alla curva diviene *tetragonale* perchè segano una g_4^1; però questa è da considerarsi *pentagonale* con un punto fisso nella serie g_5^1.

d) se sono provviste di un punto quintuplo V^5 e 0, 1, 2, 3, 4 punti doppi sono *bigonali* rispettivamente di 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª *specie* tutte *tipiche*.

6.° Il sesto gruppo è formato dalle sole curve di genere zero C_0^7 (razionali, unigonali); essa possiede sempre $\infty^1 g_1^1$ segate dalla C^5 agg. che passano per 4 punti arbitrarii della curva, perchè esse segano una g_5^5 regolare (non speciale). Ma intanto:

a) se sono provviste di soli punti doppi indipendenti hanno 15 g_5^1, parti della serie g_{75}^{75} segata dalle curve aggiunte di ordine 15;

b) se sono provviste di un punto V^3 e altri punti doppi distinti presentano una g_4^1 e 12 g_5^1; se sono provviste di 2, 3, o 4 punti tripli ed altri eventuali punti doppi presentano 2 o 3 o 4 g_4^1 ed eventuali g_5^1;

c) se sono provviste di un punto quadruplo V^4 e 9 punti doppi oppure dal punto quadruplo V^4, un punto triplo e 6 punti doppi; oppure di un punto quadruplo, 2 punti tripli e 3 punti doppi; oppure di un punto quadruplo e 3 punti tripli, essa possederà sempre, oltre le g_1^1, serie g_3^1, g_4^1 e g_5^1 in maniere diverse;

d) se infine essa è provvista di un punto V^6 sestuplo, essa avrà una sola g_1^1 da considerarsi quintupla, e $\infty^1 g_6^1$ e costituisce la *curva supplementare* della C_{15}^7.

15. Insistiamo a dichiarare che qui non abbiamo tenuto conto della maggiore suddivisione in sottocategorie, che si possono presentare quando si tien conto della sovrabbondanza dei sistemi di curve aggiunte dei più piccoli ordini, che abbiamo fatto conoscere fin dal 1896 con le due Memorie *Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie*, già citata nella nota [2]), e *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari* [10]).

Un esempio lo abbiamo mostrato nella Nota presentata fin dal dicembre 1940 all'Acc. Gioenia [1]), facendo vedere che le curve C_6^7 del 4° gruppo del n. 13, invece di tre categorie, presentano 8 tipi:

1.° 9 punti doppi indipendenti, *pentagonali*.
2.° 9 punti doppi dipendenti ($\rho_1=1$) trigonali di 2ª specie.
3.° 1 punto triplo a 6 punti doppi indipendenti, *tetragonali*.
4.° 1 punto triplo e 6 punti doppi dipendenti, *trigonali*.
5.° 2 punti tripli e 3 punti doppi, *tetragonale*.
6.° 3 punti tripli, *tetragonali*.
7.° 1 punto quadruplo e 3 punti doppi, *trigonale*.

---

[10]) Rend. R. Acc. di Napoli, 1896, 7/8.

8.° 1 punto quadruplo e 1 punto triplo, trigonale di 2ª specie.

Cosicchè si ha un tipo pentagonale, il 1°;

tre tipi tetragonali, il 3°, 5°, 6°;

quattro tipi trigonali, il 2°, 4°, 7°, 8°;

ed abbiamo dimostrato che questi tipi non sono trasformabili birazionalmente fra loro, fatta eccezione dei due tipi 7° e 8° che prevengono entrambi dalla C_6^6 con un punto triplo e un punto doppio.

16. Ciò che qui abbiamo esposto non ha la pretesa dei dettagli minuti. Abbiam voluto, con pochi cenni, mostrare la possibilità di poter percorrere la strada che potrà forse far giungere ad una definitiva classificazione della infinita moltitudine delle curve algebriche di tutti gli ordini e di tutti i generi. Ai più giovani di me il compito di avanzare.

Gragnano, marzo 1942 - XX.

Osservazioni geologiche nella bassa valle del Sabato.

Nota del dott. **Giuseppe Mirigliano,** *presentata dal socio* **G. De Lorenzo**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Calcolo rigoroso delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio.

Nota del socio ordinario **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Sobre a integração das equações diferenciais ordinarias lineares e as equações integrais

Nota del socio corrisp. straniero **Ignacio M. Azevedo do Amaral**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX)

Sunto. — Si dà un metodo per risolvere una equazione differenziale lineare completa per integrali definiti, nel quale si riscontra una certa arbitrarietà nella scelta del nucleo e dei limiti di integrazione. Il metodo si applica anche per la risoluzione di equazioni integrali di Fredholm di prima specie.

1. Consideremos a equação deferencial ordinaria linear, nôo homogenea

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} X_i \,.\, Y^{(n-i)} = F(x)$$

na qual

$$F(x)$$

e os coeficientes

$$X_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

são funções quaisquer da variavel independente x.

Seja

$$(2) \qquad y = \int_a^b k(x, \alpha) \,.\, u(\alpha) \,.\, d\alpha$$

uma solução particular de (1), na qual sejam convenientemente escolhidos os valores dos limites a e b e a forma da função

$$k(x \,.\, \alpha)$$

e seja a determinar a forma da função

$$u(\alpha).$$

Fazendo, em (1), a substituição (2), teremos

$$(3) \qquad \int_a^b \Theta(x, \alpha) \,.\, u(\alpha) \,.\, d\alpha = F(x)$$

sendo

$$\Theta(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n} X_i \cdot \frac{\partial^{n-i} k(x,\alpha)}{\partial x^{n-i}} \qquad (4)$$

Sejam

$$F(x) = \int_a^b \xi(x,\alpha)\, d\alpha \qquad (5)$$

e

$$\psi(\alpha) = \int_a^b \xi(x,\alpha)\, dx \qquad (6)$$

As equações (5) e (6) serão satisfeitas si tivermos, respetivamente:

$$\xi(x,\alpha) = F(x) \cdot \frac{P(x,\alpha)}{\int_a^b P(x,\alpha)\, d\alpha}$$

e

$$\xi(x,\alpha) = \Psi(\alpha) \cdot \frac{P(x,\alpha)}{\int_a^b P(x,\alpha)\, dx}$$

sendo

$$P(x,\alpha)$$

uma função arbitraria que satisfaça a condição de, no intervalo

$$|a\ ,\ b|$$

ser

$$P(x,\alpha)$$

determinada, finita e diferente de zero, e de serem

$$\int_a^b P(x,\alpha)\, d\alpha \qquad \text{e} \qquad \int_a^b P(x,\alpha)\, dx$$

determinadas, finitas e diferentes de zero.

Escolhendo, convenientemente, a forma do nucleo

$$K(x, \alpha)$$

e os valores dos limites a e b da integral do segundo membro da transformação (2), podemos obter, por meio de (4), uma função

$$\Theta(x, \alpha)$$

que seja determinada, finita e diferente de zero, no intervalo

$$|a, b|$$

e que

$$\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha \qquad \text{e} \qquad \int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx$$

sejam tambem determinadas, finitas e diferentes de zero. Nestas condições podemos supor

$$P(x, \alpha) = \Theta(x, \alpha)$$

e teremos

$$\xi(x, \alpha) = F(x) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha} \tag{7}$$

e

$$\xi(x, \alpha) = \Psi(\alpha) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx} . \tag{8}$$

De (3), (5) e (8) deduz-se

$$\int_a^b \left[u(\alpha) - \frac{\Psi(\alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx} \right] \Theta(x, \alpha)\, d\alpha = 0 \tag{9}$$

equação que é satisfeita si

$$u(\alpha) = \frac{\psi(a)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx} . \tag{10}$$

Como de (6) e (7) se conclue

$$(11) \qquad \psi(\alpha) = \int_a^b F(x) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha}\, dx$$

deduuz-se de (2), (10) e (11)

$$(12) \qquad y = \int_a^b \frac{K(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx}\, d\alpha \int_a^b F(x) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha}\, dx.$$

2. — Escolendo a fórma da funçâo

$$K(x, \alpha)$$

e os valores dos limites a e b, de modo que, satisfeitas as condiçôes já indicadas no parágrafo 1, a integral do segundo membro de (12) seja determinada, finita e diferente de zero a funçâo y definida por (12) sera una soluçao particular de (1).

Con efeito, preliminarmente, observemos que de (5) e (8) se conclue

$$F(x) = \int_a^b \Psi(\alpha) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx}\, d\alpha$$

e, de (6) e (7)

$$\Psi(\alpha) = \int_a^b F(x) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha}\, dx.$$

Teremos, portanto,

$$(13) \quad F(x) = \int_a^b \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx} \cdot d\alpha \int_a^b F(x) \cdot \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha} \cdot dx.$$

Façamos, agora, a substituição de (12) em (1) e obteremos

$$\int_{a}^{b} \frac{\Theta(x,\alpha)}{\int_{a}^{b}\Theta(x,\alpha)\,dx}\cdot d\alpha \int_{a}^{b} F(x)\cdot\frac{\Theta(x,\alpha)}{\int_{a}^{b}\Theta(x,\alpha)\,d\alpha}\cdot dx = F(x)$$

resultado que, à vista de (13), mostra ser (12) una solução de (1), desde que se verifique a condição de ser a integral do segundo membro de (12) determinada, finita e diferente de zero.

3. — O método exposto no paràgrafo 1 não é aplicavel quando

$$F(x) = 0$$

isto é quando (1) se reduz a

$$\sum_{i=0}^{i=n} X_i \cdot y^{(n-i)} = 0, \tag{14}$$

Neste caso, porem, é possivel transformar (14) em uma equação não homogenea, ou da fórma (1), pela substituição

$$y = z - \gamma(x)$$

sendo

$$\gamma(x)$$

arbitrariamente escolhida, e aplicar à equação transformada assim obtida o método exposto no paragrafo 1.

4. — Apliquemos o método exposto no paragrafo 1 à equação

$$x\cdot y^{(2)} + 2\cdot y^{(1)} + x\cdot y = 5\cdot e^{2x} - 2\cdot e^{x}. \tag{15}$$

Suponhamos

$$K(x,\alpha) = e^{\alpha x} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \tag{17}$$

e teremos

$$\Theta(x, \alpha) = e^{\alpha x}[x(\alpha^2 + 1) + 2\alpha] \tag{18}$$

$$\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx = \frac{e^{2\alpha}}{\alpha^2}(2\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 1) - \frac{e^{\alpha}}{\alpha^2}(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1) \tag{19}$$

$$\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha = 5 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{x}. \tag{20}$$

É facil verificar que a escolha do nucleo

$$K(x, \alpha)$$

definida pela forma (16), satisfaz às condições relativas a

$$\Theta(x, \alpha) \quad , \quad \int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx \quad . \text{ e } \quad \int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha$$

indicadas no paragrafo 1.

Como

$$F(x) = 5 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{x} \tag{21}$$

conclue-se, de (12), que (15) terá como soluçâo particular

$$y = \int_1^2 e^{\alpha x} \cdot d\alpha$$

ou

$$y = \frac{1}{x}(e^{2x} - e^{x}) \tag{22}$$

que, é facil verificar, é uma soluçâo particular de (15).

5. — Si na formula (13) fizermos

$$w(\alpha) = \int_a^b \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha} \cdot F(x)\, dx \tag{23}$$

teremos

$$F(x) = \int_a^b \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx} \cdot w(\alpha) \cdot d\alpha. \tag{24}$$

A formula (23) resolve a equação integral (24), e, reciprocamente, a formula (24) resolve a equação integral (23). Fazendo

$$L(x, \alpha) = \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, dx} \tag{25}$$

e

$$R(x, \alpha) = \frac{\Theta(x, \alpha)}{\int_a^b \Theta(x, \alpha)\, d\alpha} \tag{26}$$

as equações (23) e (24) se transformam em

$$w(\alpha) = \int_a^b R(x, \alpha) \cdot F(x) \cdot dx \tag{27}$$

e

$$F(x) = \int_a^b L(x, \alpha) \cdot w(\alpha) \cdot d\alpha \tag{28}$$

concluindo-se de (25) e (26)

$$\int_a^b L(x, \alpha)\, dx = 1 \tag{29}$$

e

$$\int_a^b R(x, \alpha)\, d\alpha = 1. \tag{30}$$

A formula (13) permite, pois, resolver equações integrais de primeira especie, de Fredholm, isto é, das formas (27) e (28), quando se verificam as condições (29) e (30).

6. — Apliquemos o exposto no paragrafo precedente à resolução da equação integral (28), quando

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{x}(e^x - 1) \tag{31}$$

$$L(x, \alpha) = \frac{e^{\alpha x} \cdot \alpha}{e^{2\alpha}(e^{\alpha} - 1)} \tag{32}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \tag{33}$$

É facil reconhecer que o nucleo

$$L(x, \alpha)$$

definido por (32), satisfaz à condição (29), e de (25) e (32) conclue-se que

$$\Theta(x, \alpha) = e^{\alpha x}. \tag{34}$$

Ter-se-a, pois, à vista de (26) e (34)

$$R(x, \alpha) = \frac{e^{\alpha x} \cdot x}{e^{2x}(e^x - 1)}. \tag{35}$$

Substituindo, em (23), os valores (31) e (35) teremos

$$w(\alpha) = \frac{e^{2\alpha}(e^{\alpha} - 1)}{\alpha} \tag{36}$$

que é a solução da equação (28), no caso considerado, come é facil verificar.

Com efeito, si, em (28), substituirmos os valores (32) e (36) teremos que

$$F(x)$$

será definida por (31).

7. — Dois nomes desejo deixar consignados nestas paginas: Mauro Picone, da R. Universidade de Roma, e Gabriele Mammana, da R. Universidade de Naples, atualmente em missão em nossa Faculdade Nacional de Filosofia.

A ambos, e, por fórmas diversas devo inestimave estimulo para o proseguimento de minhas investigações, que ainda encontraram no segundo valioso elemento critico.

Rio de Janeiro, 19 de Agosto de 1941.

L'estensimetro a base fissa nella determinazione di dilatazioni non uniformi.

Nota del Dr. Ing. **Mario Turra**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**.

(Adunanza del dì 7 marzo 1942 - XX)

Sunto. — Ricordati brevemente i principî ed il campo di applicazione degli estensimetri a base fissa, si accenna al procedimento Rueil-Fischer mediante il quale, ricorrendo a speciali tipi a base variabile, è possibile rilevare allungamenti unitari anche nei casi ove l'impiego dei primi non si mostra ordinariamente adatto. Si espone un procedimento mediante il quale si rende superfluo nei casi detti, ricorrere ad estensimetri a base variabile.

Nella determinazione diretta e per via puramente meccanica delle deformazioni subite in superficie da strutture elastiche sollecitate staticamente, vengono come è noto impiegati comunente strumenti il cui principio di funzionamento è basato sulla valutazione degli spostamenti relativi tra punti scelti in modo opportuno sulla superficie da esaminare.

Quando interessi misurare esclusivamente gli spostamenti relativi di una coppia di punti nella direzione della loro congiungente, spostamenti che a prescindere dal segno chiameremo in modo generico allungamenti, mettendo da parte strumenti più propriamente impiegati nelle prove dei materiali quali ad esempio l'apparecchio a specchi di Martens, si fa ricorso a strumenti appositamente ideati ai quali vengono riserbati i nomi di estensimetri e talora di tensometri.

Questi strumenti constano in generale di una incastellatura recante due coltelli paralleli uno dei quali fisso all'incastellatura stessa, l'altro suscettibile invece di piccole rotazioni intorno ad un asse parallelo al suo taglio. Essi vengono applicati in modo che i coltelli mordano leggermente la superficie da esaminare, tenuti in sito mediante dispositivi di vario genere la cui scelta è spesso suggerita dalla conformazione locale della struttura [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Esistono estensimetri esclusivamente meccanici, muniti di indice e scala graduata, nei quali la rotazione del coltello mobile viene amplificata in opportuna misura attraverso un sistema di leve facenti capo all'indice stesso; in taluni tipi destinati a misure più fini la lettura viene effettuata mediante microscopio [1], [2], [3], [4].

Esistono inoltre estensimetri concettualmente derivati dall'apparecchio di Martens il quale per questo genere di rilievi risulta poco adatto

a cagione della sua base di misura troppo grande (50 ÷ 200 mm). In questi apparecchi il rilievo viene effettuato osservando mediante cannocchiale la immagine di una scala fissa riflessa da uno specchietto, al quale sono direttamente comunicate le rotazioni del coltello mobile [1], [2], [3]. Parimenti a specchio sono altri estensimetri nei quali si utilizzano per la lettura le deviazioni impartite ad un raggio luminoso emesso da una sorgente fissa.

Ricordiamo infine una speciale categoria di estensimetri destinati a misure di estrema finezza, nei quali la lettura viene effettuata per via indiretta su appositi sensibilissimi strumenti atti a segnalare le correnti provocate in vari modi dal movimento relativo del coltello mobile rispetto all'incastellatura [1], [2], [3], [4].

Quanto al fattore di amplificazione degli apparecchi ora accennati, esso varia a seconda della loro costruzione e degli scopi: negli estensimetri puramente meccanici si raggiungono ordinariamente valori dell'ordine di 1/(1.000 ÷ 2.500); in quelli a specchi si può ragiungere talora a fattori di amplificazione dell'ordine di 1/(10.000 ÷ 15.000). Amplificazioni molto maggiori si ottengono con gli estensimetri a lettura indiretta, in taluno dei quali il fattore di amplificazione può giungere fino a 1/(300.000 ÷ 500.000) [2], [4], [7].

Quale che sia il tipo impiegato, l'estensimetro dà naturalmente la misura dell'allungamento totale su di un tratto lungo quanto la sua base, allungamento che diviso per la lunghezza del detto tratto ne fornisce lo allungamento unitario medio. L'indicazione dello strumento corrisponde quindi al valore effettivo dell'allungamento unitario solo nel caso in cui questo sia uniforme lungo tutto il tratto definito dalla base stessa.

In molti casi, quando le variazioni dell'allungamento in questione entro la base dell'estensimetro sono lievi, tale indicazione risulta più che sufficiente; ma altrettanto non si può dire quando le variazioni in parola cessano di essere trascurabili o quando la superficie da esaminare si presenta sensibilmente incurvata.

Per ovviare a questi inconvenienti si costruiscono estensimetri a base di misura molto piccola, talvolta dell'ordine di qualche millimetro e meno. Si può allora, se si tratta di allungamenti unitari i quali subiscono rapide variazioni, ritenerli costanti entro il campo di una base di misura sufficientemente piccola e, nel caso di superficie che presentano una sensibile curvatura, assumere ancora una base molto piccola, onde poter praticamente confondere la corda con l'arco [2], [3], [4], [7].

Tuttavia, anche ricorrendo ai particolari strumenti testè nominati, esistono casi nei quali l'approssimazione ottenuta non è sufficiente, il che accade ad esempio in corrispondenza di intagli più o meno raccordati ed in prossimità di fori, nei cui immediati intorni gli allungamenti unitari variano in generale molto rapidamente.

In tali casi, e specie quando neppure gli estensimetri a base molto piccola danno sufficiente affidamento, si utilizza un procedimento differen-

ziale, segnalato da Ruehl e da Fischer, consistente nell'impiegare in opportuna maniera estensimetri a base variabile. [2] [3] [4] [5]).

Il procedimento sviluppato da questi Autori consiste nell'effettuare, a partire da una certa origine, una serie di determinazioni lungo una retta avente nel punto studiato la direzione dell'allungamento che interessa.

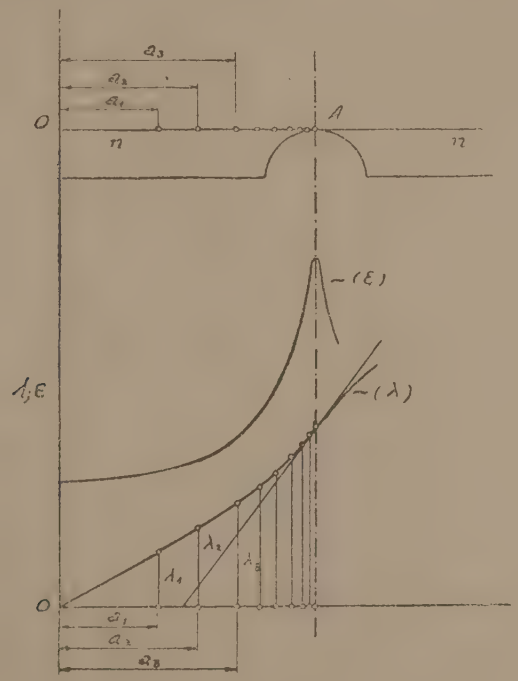


Fig. 1.

Così, ad esempio nel caso della fig. 1, se si desidera conoscere il valore dell'allungamento unitario in corrispondenza di A (fondo dell'intaglio) nella direzione n-n, si effettuerà una serie di misure consecutive tenendo fisso in un certo punto 0 uno dei coltelli dello strumento ed impiegando basi di misura successivamente crescenti, per cui il secondo coltello occuperà posizioni variabili individuate dalle ascisse $x = a_1, a_2, a_3$, (fig. 1).

Se ora, in corrispondenza della x che individua la posizione del secondo coltello, portiamo volta per volta come ordinata l'allungamento totale λ indicato dallo strumento, otterremo un diagramma come quello (λ) della fig. 1: la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente in x alla (λ) fa con l'asse delle ascisse darà l'allungamento unitario ε nell'in-

torno corrispondente all'ascissa x (allungamento che diremo brevemente « locale »), onde:

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\lambda}{dx}.$$

Derivando quindi per via grafica la curva (λ) rispetto ad x, si perverrà senz'altro alla distribuzione del detto allungamento locale lungo il tratto considerato: curva (ε) di fig. 1.

Per il procedimento di Ruehl-Fischer è dunque condizione essenziale disporre di estensimetri a base variabile ed i due Autori hanno infatti, e separatamente, impiegato particolari tipi di estensimetri a specchi, da essi stessi ideati, le cui basi di misura potevano variare da 25 a 200 mm per l'apparecchio di Ruehl e da 25 a 130 mm per l'apparecchio di Fischer. [3] [5] [6].

Questo, in poche parole, il procedimento a disposizione per le speciali misure accennate: come si vede, esso richiede l'impiego di estensimetri a base variabile dei quali spesso non si dispone.

Scopo di questa nota è di esporre un procedimento ideato in occasione di alcune misure per le quali chi scrive non disponeva appunto che di estensimetri a base piccola, e per l'applicazione del quale sono sufficienti in linea di massima due estensimetri a base fissa: uno a base piuttosto piccola, e cioè dell'ordine di qualche millimetro, l'altro a base più grande e cioè dell'ordine di $10 \div 20$ mm. Mostreremo in seguito che il più delle volte, può anche bastare il solo estensimetro a base maggiore.

Riferendoci alla fig. 2, che schematizza lo stesso caso al quale si suole fare riferimento per esporre il procedimento Rühl-Fischer, immaginiamo di dover determinare l'allungamento locale lungo la n-n, in prossimità di un punto A di una barretta intagliata, sollecitata a trazione o inflessa nel piano della figura.

Poichè l'impiego in A di uno dei detti estensimetri secondo il procedimento ordinario, data la rapidità con cui varia nei pressi di A l'allungamento, non condurrebbe a rilievo di sufficiente approssimazione, si cominci con l'eseguire lungo la n-n, ad una certa distanza da A e poniamo a sinistra, una prima serie di rilievi impiegando l'estensimetro a base più piccola; si determini così la legge secondo cui varia l'allungamento locale in un tratto O-O', lungo almeno quanto la base dell'estensimetro a base maggiore.

Ricorrendo successivamente a quest'ultimo apparecchio si esegua un'altra serie di rilievi cominciando a disporre lo strumento con il pieduccio destro in O: diviso il risultato di questa prima misura per la base, si otterrà evidentemente la media degli allungamenti unitari ricavati impiegando l'altro estensimetro, quello a base più piccola.

Si proseguano ulteriormente i rilievi spostando successivamente lo strumento verso A di piccoli trattti minori della sua base (ad es. 1 mm): procedendo in questo modo ci avvicineremo man mano con il coltello destro ad A

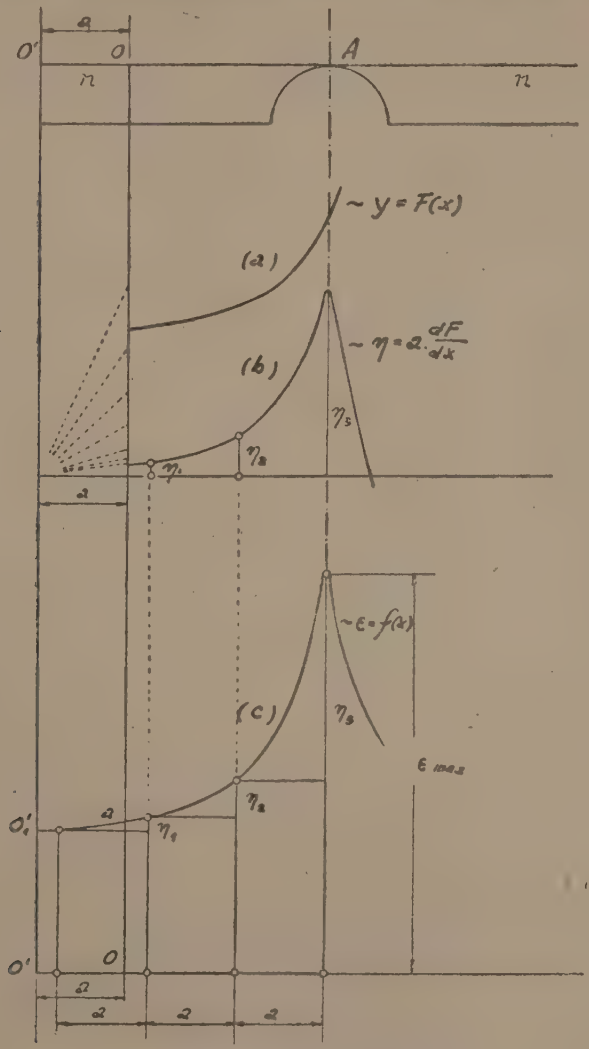


Fig. 2.

e, se non si desidera la distribuzione dell'allungamento unitario anche dall'altra parte di A, potremo sospendere i rilievi non appena si sarà oltrepassato questo punto.

Per ogni lettura si determini la distanza da O di un punto prestabilito

dello strumento, ad esempio del detto coltello sinistro, e si costruisca il grafico dei punti le cui ascisse sono le distanze da O ora definite e le ordinate i valori dell'allungamento medio riscontrati nei corrispondenti rilievi: il diagramma che si ottiene riunendo i punti del grafico innanzi detto rappresenterà la legge secondo cui varia, nel segmento OA della n-n, l'allungamento unitario medio, computato entro tratti pari alla base dell'estensimetro, fig. 2 *a*).

Se indichiamo con $y = F(x)$ la curva del nominato diagramma essa, per il modo stesso secondo cui è stata ottenuta e convenendo di rappresentare con $f(x)$ l'allungamento unitario locale, con a la base dell'estensimetro ora impiegato, potrà essere espressa dalla:

$$F(x) = \frac{1}{a} \int_{x-a}^{x} f(x)\, dx \qquad 1)$$

che, derivata rispetto ad x, fornisce:

$$a \frac{dF(x)}{dx} = f(x) - f(x-a). \qquad 2)$$

Notiamo qui incidentalmente che la relazione ora trovata esprime in sostanza il teorema della media.

La 2) si può scrivere:

$$f(x) = f(x-a) + a \frac{dF(x)}{dx} \qquad 3)$$

la quale dice che l'allungamento locale in corrispondenza dell'ascissa x è fornito dal valore dell'allungamento stesso in corrispondenza dell'ascissa $x-a$, più il prodotto della derivata della $F(x)$ nel punto x, moltiplicata per la base dell'estensimetro.

Si esegua per via grafica la derivazione della $y = F(x)$ assumendo per base a: l'ordinata generica del nuovo diagramma (fig. 2 *b*) varrà:

$$\eta = a \frac{dF(x)}{dx}$$

Sommando quindi, secondo la 3), a questa ordinata quella della $f(x)$ misurata nel punto che, rispetto all'ascissa generica x si trova di a più vicino all'origine, si avrà, nella somma, l'ordinata della $f(x)$.

Per via grafica la 3) conduce così, partendo da punti della $f(x)$ compresi entro il tratto $O'O$, alla semplice costruzione della fig. 2 *c*), mediante la quale è possibile rintracciare i punti della $f(x)$ posti alla destra di O.

Poichè d'altra parte la $f(x)$ e quindi la $f(x-a)$ non è inizialmente nota se non nel tratto $O'O$, il tracciamento del diagramma della $f(x)$ va iniziato da punti x per i quali $f(x-a)$ è fornita da rilievi separatamente eseguiti, impiegando per l'appunto l'estensimetro a base più piccolo.

Sin da ora si scorge che, nel caso che interessi (come è del resto il più delle volte sufficiente) esclusivamente il valore della $f(x)$ in A, non occorre disegnare tutto il diagramma della $f(x)$, ma soltanto pochi punti di esso, per determinare i quali basterà partire da un punto del tratto $O'O$ che disti da A di un multiplo di a.

Per ciò che riguarda la pratica attuazione del procedimento cade opportuno osservare che in molti casi la $f(x)$, anche se varia rapidamente in prossimità di A, tende ben presto in entrambi i versi a raggiungere un valore praticamente costante. Nei casi nei quali ciò riesce prevedibile non è necessario ricorrere all'impiego dell'estensimetro a piccola base poichè nelle zone ove l'allungamento è uniforme il valore dell'allungamento medio ricavato mediante l'estensimetro a base maggiore coincide evidentemente con quello locale.

Ma è facile mostrare che, potendosi mediante estensimetri a base fissa rilevare anche, e con tutta esattezza, allungamenti i quali varino linearmente, se, procedendo da A, a partire da un certo punto della n-n la legge secondo cui varia l'allungamento locale può essere ritenuta lineare (il che è nel più dei casi perfettamente ammissibile), si può ancora far ricorso esclusivamente all'estensimetro a base maggiore per determinare i valori dell'allungamento entro il tratto O-O' innanzi descritto.

Casi del genere si presentano con molta frequenza quando le forze esterne applicate sono, o possono essere considerate, uniformemente ripartite su superficie più o meno estese della struttura in esame. Molti altri casi possono però consentire l'accennata semplificazione del procedimento per giudicare i quali vale il rilievo di particolari simmetrie ovvero il rapido esame del quadro delle isostatiche, come è noto agevolmente ottenibile col metodo delle vernici [10]) [11]) [12]) [13]).

Quando si verifichino le condizioni ora accennate, e cioè quando sia possibile fare assegnamento sulla presenza di zone della retta $n\,n$, entro le quali l'allungamento unitario possa essere considerato uniforme, od al più variabile linearmente, è conveniente iniziare i rilievi dal punto A.

Supponendo che una zona come innanzi definita giaccia dalla parte sinistra di A, il primo rilievo sarà effettuato collocando l'estensimetro col coltello destro in A, i successivi in posizioni sempre più a sinistra ed è chiaro che quando in due posizioni successive l'estensimetro darà indicazioni praticamente eguali, si potrà ritenere di aver rintracciata la detta zona.

Nel caso in cui già entro un tratto pari alla base dell'estensimetro la $F(x)$, a partire dal punto considerato, raggiunga un valore costante, la determinazione risulta semplicissima: si noti infatti che in tali condizioni

è sufficiente segnare con accuratezza solo un limitato numero di punti della $F(x)$ in corrispondenza dell'ascissa che interessa e tali in ogni caso che sia possibile individuare con buona approssimazione la posizione della tangente, della quale basterà rilevare semplicemente la pendenza (fig. 3): l'applicazione della 3) fornirà allora ed immediatamente il valore dell'allungamento unitario nel punto considerato. Notiamo inoltre che nel caso ora detto è sufficiente un limitato numero di rilievi i quali saranno anche qui effettuati partendo dal punto in corrispondenza del quale si desidera determinare il valore dell'allungamento unitario.

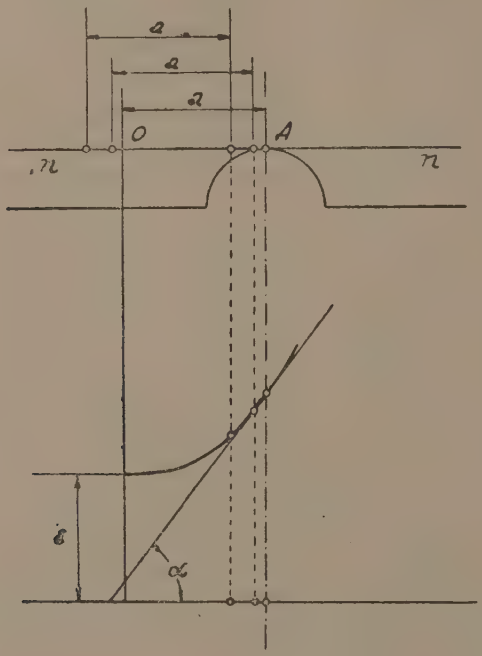


Fig. 3.

Resta da stabilire in quale maniera e senza incorrere in sensibili errori nella valutazione dell'ascissa x si può praticamente procedere nei successivi spostamenti dell'estensimetro..

A questo scopo è molto utile tracciare preventivamente sulla superficie da esaminare, normalmente alla retta $n\,n$, una serie di brevi linee parallele: disponendo di una macchina a dividere e con un utensile piuttosto affilato è molto facile tracciare le parallele in parola, ma nel più dei casi è sufficiente ricorrere al carrello di un tornio che sia naturalmente in buone condizioni. Perseguire una grandissima esattezza nel tracciamento

delle dette linee appare infatti superfluo, dati gli errori inevitabilmente connessi al procedimento grafico che interviene nell'applicazione del metodo.

Il sistema di linee così ottenuto permette di rintracciare agevolmente le successive posizioni dell'estensimetro del quale il coltello prescelto per il computo delle ascisse deve esattamente e successivamente capitare nei lievi solchi delle linee anzidette.

In quanto abbiamo esposto sin'ora è stato fatto costantemente riferimento agli estensimetri usuali provvisti di coltelli, ma per una maggiore accuratezza di determinazione è in verità desiderabile che lo strumento, in luogo di coltelli, sia piuttosto munito di punte, giacchè gli allungamenti che hanno luogo secondo direzioni parallele alla n-n sono, anche in prossimità di questa, in generale diversi da quelli che si verificano lungo la n-n stessa. In queste condizioni la lunghezza dei coltelli, sia pure di qualche millimetro, ha senza dubbio influenza sul rilievo [2] [3] [4].

È appena necessario infine osservare che i successivi rilievi vanno eseguiti raggiungendo in ciascuna prova sempre lo stesso valore finale del carico, l'entità del quale dovrà essere scelta in modo che in nessun punto della struttura venga superato il limite di elasticità del materiale.

Se, come fu il caso di chi scrive, si dispone di una macchina per prove di materiali munita di apparecchio per la costanza del carico basterà, una volta per tutte, regolare la macchina su un determinato valore del carico limitandosi a manovrare in seguito esclusivamente il robinetto di scarico.

In prove da noi eseguite allo scopo di controllare l'applicazione pratica del procedimento ed esperite con tensometri Huggenberger (tipo A; base: $10 \div 20$ mm) su modelli strutturali per i quali erano conosciuti i fattori di concentrazione delle tensioni, si raggiunsero agevolmente, nel computo di queste, approssimazioni del $4 \div 5\%$.

Napoli, Istituto di Costruzione di Macchine.

BIBLIOGRAFIA

[1]) E. Lehr, *Messgeräte fur Dehnugsmessungen.* Masch.-Bau., vol. 10 (1931).

[2]) E. Lehr, *Spannugsverteilung in Konstruktionselementen.* VDI Verlag, 1934.

[3]) F. Rötscher und R. Jaschke, *Dehnugsmessungen und ihre Anwendung*, Springer, 1939.

[4]) E. Siebel, *Prüf-und Messeinrichtungen,* vol. 1. Springer, 1940.

[5]) L. Baes, *L'extensomètre Huggenberger.* Soc. belg Ing. et Ind., vol. 9, (1929).

[6]) Thum, A., O. Swenson, H. Weiss, *Neuzeitliche Dehnungsmessgeräte*, Forch. Ing. Wes., vol. 9, (1938).

[7]) K. Böttcher, *Beitrag zur Enwicklung von Dehnungsmessern kleiner Messlänge.* Z. Instrumentenkde. (1928).

[8]) D. Ruehl, *Experimentelle Ermittlung ebener Verschiebungs-und Spannungszustände auf neuem Wege* etc., VDI Forch. — Heft, n. 221, (1920).

[9]) G. Fischer, *Kerbwirkung an Biegstaben.* VDI Verlag, 1932.

[10]) O. Dietrich u. E. Lehr, *Das Dehnugslinienverfahren* etc., Z. VDI vol. 76 (1932).

[11]) O. Dietrich, *Das Maybach-Dehnlinienverfahren* etc., Metall-Wirtschaft-Wissenschaft-Technik, aprile 1940.

[12]) A. Portevin et M. Cymboliste, *Procédé d'étude de la distribution des efforts élastiques* etc., Revue de Metallurgie, 1934.

[13]) M. Turra, *Le vernici fragili nello studio delle strutture elastiche*, Pubblicazione dell'Istituto di Costruzione di Macchine della R. Università di Napoli, 1941.

Metodo semplificativo e speditivo per il calcolo statico di verifica e di progetto per un arco reticolare a spinta eliminata.

Nota del socio ordinario **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 8 novembre 1941 - XX).

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

EQUAZIONI ALGEBREICHE NELLE ALGEBRE DEL 1° ORDINE DOTATE DI MODULO

Nota della prof. **Anna Rocco Boselli**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Sunto. — Nella prima parte di questo lavoro, tenuto conto di quello del prof. SPAMPINATO [1]) e del mio lavoro precedente [2]), calcolo il numero delle radici di una equazione algebrica di grado r nelle 9 algebre commutative dotate di modulo, del IV ordine, e il numero delle radici delle equazioni speciali a destra e a sinistra di grado r, nelle sette algebre non commutative del 4° ordine dotate di modulo.

Nella 2ª parte calcolo gli elementi pseudonulli e le sottoalgebre eccezionali nelle stesse 16 algebre di cui sopra e controllo volta per volta il teorema dimostrato dal prof. SPAMPINATO [1]): *In una qualunque algebra complessa dotata di modulo, una generica equazione di grado* r *ammette un numero finito di radici e questo numero è dato da una potenza* r^s, *del grado* r *dell'equazione. L'intero* s *è un carattere dell'algebra ed è eguale alla differenza tra l'ordine dell'algebra e quello della sua sottoalgebra eccezionale.*

Equazioni algebriche nelle algebre del 4° ordine dotate di modulo. Algebre non commutative.

1. Tenuto conto della forma che assume un polinomio di grado r

$$F(x) = \sum_{m}^{0 \cdots r} \alpha_m x^m = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_r x^r$$

nell'algebra del 1° tipo, e precisamente:

$$F(x) = [\sum_{m}^{0 \cdots r} a_m x_1^m] u_1 + [\sum_{m}^{0 \cdots r} b_m x_2^m] u_2 + [\sum_{m}^{0 \cdots r} c_m x_3^m] u_3 + [\sum_{m}^{0 \cdots r} d_m x_4^m] u_4$$

si ricava che:

[1]) Nicolò SPAMPINATO, *Sulle fudzioni di ua' algebra complessa dotata di un modulo.* Rendiconti di Matem., serie V, vol. II, fasc. 2°, 1941.

[2]) Anna ROCCO BOSELLI, *Funzioni totalmente derivabili e analitiche secondo* RINGLEB. Rend. Acc. Gioenia Catania, 1942.

La risoluzione dell'equazione algebrica di grado r, $F(x)=0$, *nell'algebra del* 4^0 *ordine tipo I, equivale alla risoluzione del sistema di* 4 *equazioni, di grado* r, *nelle quattro incognite complesse* $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$:

$$\begin{cases} \sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\ \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_2^m = 0 \\ \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_3^m = 0 \\ \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_4^m = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette perciò, in generale, r^4 *soluzioni.*

2. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra del* 2^0 *tipo è*:

$$F(x)=[\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m]u_1+[(\sum_{m}^{0\cdots r} m a_m x_1^{m-1})x_2+\sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m]u_2+[\sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_3^m]u_3+[\sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_4^m]u_4;$$

si ricava che:

La risoluzione dell'equazione algebrica di grado r, $F(x)=0$, nell'algebra del 4^0 ordine, tipo 2^0, equivale alla risoluzione del sistema di 4 equazioni, di grado r, nelle quattro incognite complesse $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$:

$$\begin{cases} \sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\ (\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0 \\ \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_3^m = 0 \\ \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_4^m = 0 \end{cases}$$

La 1ª equazione dà r valori per x_1, la 2ª per ogni valore $x_1^{(1)}$ dà un valore per x_2, la 3ª dà r valori per x_3 e la 4ª r valori per x_4; in tutto r^3 soluzioni. Se poi $x_1^{(1)}$ è radice per lo meno doppia dell'equazione $\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m=0$ il sistema ammette infinite soluzioni, mentre se $x_1^{(1)}$ è radice dell'equazione $\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0$ e non dell'equazione $\Sigma b_m x_1^m = 0$, in corrispondenza di tale

radice non vi è nessuna soluzione del sistema e quindi dell'equazione algebrica di grado r.

Quindi in tale algebra l'equazione presenta r^3 *soluzioni, o infinite o nessuna.*

3. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra del 3° tipo è*:

$$F(x) = [\Sigma a_m x^m]u_1 + [(\Sigma m a_m x^{m-1})x_2 + \Sigma b_m x^m]u_2 + [\Sigma c_m x^m]u_3 + \\ + [(\Sigma m c_m x_3^{m-1})x_4 + \Sigma d_m x_3^m]u_4;$$

perciò, la risoluzione dell'equazione algebrica di grado r, $F(x) = 0$, nell'algebra del quart'ordine, tipo 3°, equivale alla risoluzione del sistema di 4 equazioni, di grado r, nelle quattro incognite complesse x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} \sum_m^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\ (\sum_m^{0\cdots r} m a_m x_1^{m-1})x_2 + \sum_m^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0 \\ \sum_m^{0\cdots r} c_m x_3^m = 0 \\ (\sum_m^{0\cdots r} m c_m x_3^{m-1})x_4 + \sum_m^{0\cdots r} d_m x_3^m = 0 \end{cases}$$

La prima equazione, in generale, dà r valori per x_1, la seconda per ogni valore di x_1 un valore per x_2, la terza dà r valori per x_3, la quarta per ogni valore di x_3 un valore per x_4; in definitiva:

In quest'algebra il sistema, e quindi l'equazione $F(x) = 0$, *ammette* r *soluzioni, ma, come è facile controllare, anche quì ve ne possono essere nessuna o infinite.*

4. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra del 4° tipo è*:

$$F(x) = \left[\sum_m^{0\cdots r} a_m x^m\right]u_1 + \left[\left(\sum_m^{0\cdots r} m a_m x_1^{m-1}\right)x_2 + \sum b_m x_1^m\right]u_2 + \left[\left(\sum_m^{0\cdots r} m a_m x_1^{m-1}\right)x_3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\sum_m^{0\cdots r} m(m-1)x_1^{m-2}\right)x_2^2 + \left(\sum_m^{0\cdots r} m b_m x_1^{m-1}\right)x_2 + \sum_m^{0\cdots r} c_m x_1^m\right]u_3 + \left[\sum_m^{0\cdots r} d_m x_1^m\right]u_4$$

perciò la risoluzione dell'equazione $F(x)=0$, dipende dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \Sigma\, a_m x_1^m = 0 \\ (\Sigma\, m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \Sigma\, b_m x_1^m = 0 \\ \left(\sum m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_3 + \left(\frac{1}{2}\sum_m^{0\cdots r} m(m-1) x_1^{m-2}\right) x_2^2 + \left(\sum_m^{0\cdots r} m b_m x_2^{m-1}\right) x_2 + \sum_m^{0\cdots r} c_m x_1^m = 0 \\ \Sigma\, d_m x_4^m = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà r valori per x_1, la seconda per ogni valore di x_1 dà un valore per x_2, la terza per ogni coppia di valori di x_1 e x_2 dà un valore per x_3, la quarta dà r valori per x_4. Dunque: *In quest' algebra, come nella precedente, in generale il sistema, e quindi l'equazione* $F(x)=0$ *ammette* r^2 *soluzioni. In particolare potrebbe averne zero o infinite.*

5. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra del* 5° *tipo è:*

$$F(x) = \left[\sum_m^{0\cdots r} c_m x_1^m\right] u_1 + \left[\left(\sum_m^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_m^{0\cdots r} b_m x_1^m\right] u_2 + \left[\left(\sum_m^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_3 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_m^{0\cdots r} m(m-1) c_m x_1^{m-2}\right) x_2^2 + \left(\sum_m^{0\cdots r} b_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_m^{0\cdots r} c_m x_1^m \Big] u_3 + \Big[\sum_m^{0\cdots r} m a_m x_1^{m-1}\Big) x_4 +$$

$$+ \left(\sum_m^{0\cdots r} m(m-1) a_m x_1^{m-2}\right) x_2 x_3 + \frac{1}{6}\left(\sum_m^{0\cdots r} m(m-1)(m-2) a_m x_1^{m-3}\right) x_2^3 +$$

$$+ \sum_m^{0\cdots r} m\, b_m x_1^{m-1}\Big) x_3 + \frac{1}{2}\left(\Sigma\, m(m-1) b_m x_1^{m-2}\right) x_2^2 + \left(\Sigma\, m\, c_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \Sigma\, d_m x_1^m \Big] u_4$$

perciò la risoluzione dell'equazione di grado r $F(x)=0$, dipende dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sum_m^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\ \left(\sum_m^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_m^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0 \\ \left(\sum_m^{0\cdots r} m a_m x_1^{m-1}\right) x_3 + \frac{1}{2}\sum_m^{0\cdots r} m(m-1)\, a_m x_1^{m-2}\, x_2^2 + \left(\sum_m^{0\cdots r} b_m x_1^{m-1}\, x_2 + \sum_m^{0\cdots r} c_m x_1^m = 0\right. \\ \left(\sum_m^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_4 + \left(\sum_m^{0\cdots r} m(m-1)\, a_m x_1^{m-2}\right) x_2 x_3 + \frac{1}{6}\left(\sum_m^{0\cdots r} m(m-1)(m-2) a_m x_1^{m-3}\, x_2^3 + \right. \\ + \left(\sum_m^{0\cdots r} m b_m x_1^{m-1}\, x_3 + \frac{1}{2}\left(\sum_m^{0\cdots r} m(m-1) b_m x_1^{m-2}\right) x_2^2 + \left(\sum_m^{0\cdots r} m\, c_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_m^{0\cdots r} d_m x_1^m = 0\right. \end{cases}$$

La prima equazione dà r valori per x_1, la seconda per ognuno degli r valori $x_1^{(i)}$ $(i = 1 \dots r)$ dà un valore $x_2^{(i)}$ per x_2, la terza per ognuna delle r coppie di valori $x_1^{(i)}\ x_2^{(i)}$ dà un valore $x_3^{(i)}$ per x_3, la quarta per ognuna delle r terne di valori $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$ dà un valore $x_4^{(i)}$ per x_4; dunque:

In quest' algebra il sistema, e quindi l'equazione $F(x) = 0$ *ammette in generale,* r *soluzioni; in casi particolari potrebbe anche averne infinite o nessuna.*

6. *Un polinomio di grado* r, *nell' algebra dell' ottavo tipo è:*

$$F(x) = [\overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} a_m x_1^m]\, u_1 + [(\overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} b_m x_1^m]\, u_2 +$$

$$+ [(\overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_3 + \overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} c_m x_1^m]\, u_3 + [\overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} d_m x_1^m]\, u_4$$

e la risoluzione dell'equazione di grado r, $F(x) = 0$ dipende dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} a_m x_1^m = 0 \\ (\overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} b_m x_1^m = 0 \\ (\overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_3 + \overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} c_m x_1^m = 0 \\ \overset{0\ \dots\ r}{\underset{m}{\Sigma}} d_m x_1^m = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà r valori per x_1, la seconda per ogni valore di x_1 dato dalla prima dà un valore per x_2, la terza per ogni valore di x_1 dato dalla prima dà un valore per x_3, la quarta dà r valori per x_4.

Dunque, in quest' algebra il sistema, e quindi l'equazione $F(x) = 0$ *ammette, in generale,* r^2 *soluzioni; in casi particolari potrebbe anche averne infinite o nessuna.*

7. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra del X tipo è:*

$$F(x) = [\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} a_m x_1^m]\, u_1 + [(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} b_m x_1^m]\, u_2 +$$

$$+ [(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_3 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} c_m x_1^m]\, u_3 +$$

$$+ [(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_4 + \frac{1}{2}(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m(m-1) a_m x_1^{m-2}) x_2^2 + \frac{1}{2}(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m(m-1) a_m x_1^{m-2})\, x_3^2 +$$

$$+ (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, b_m x_1^{m-1})\, x_2 + (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, c_m x_1^{m-1})\, x_3 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} d_m x_1^m]\, u_4$$

e la risoluzione dell'equazione di grado r: $F(x) = 0$ dipende dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} a_m x_1^m = 0, \\ (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} b_m x_1^m = 0 \\ (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_3 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} c_m x_1^m = 0 \\ (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_4 + \frac{1}{2}(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m(m-1) a_m x_1^{m-2}) x_2^2 + \frac{1}{2}(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m(m-1) a_m x_1^{m-2}) x_3^2 + \\ + (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, b_m x_1^{m-1})\, x_2 + (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, c_m x_1^{m-1})\, x_3 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} d_m x_1^m = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà r valori per x_1, la seconda per ogni valore di x_1 dato dalla prima dà un valore per x_2, la terza per ogni valore di x_1 dato dalla prima dà un valore per x_3, la quarta per ognuna delle r terne x_1, x_2, x_3 dà un valore per x_4. Perciò:

In quest'algebra il sistema, e quindi l'equazione $F(x) = 0$, *ammette, in generale,* r *soluzioni; eccezionalmente potrebbe avere anche nessuna soluzione o infinite.*

8. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra dell'XI tipo è:*

$$F(x) = [\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} a_m x_1^m]\, u_1 + [(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} b_m x_1^m]\, u_2 + [(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_3 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m(m-1) a_m x_1^{m-2}) x_2^2 + (\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, b_m x_1^{m-1}) x_2 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} c_m x_1^m]\, u_3 +$$

$$+ [(\overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_4 + \overset{0\cdots r}{\underset{m}{\Sigma}} d_m x_1^m]\, u_4$$

e la risoluzione dell'equazione $(F(x) = 0$ dipende dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\ (\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0 \\ (\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}) x_3 + \frac{1}{2} \sum_{m}^{0\cdots r} m(m-1) a_m x_1^{m-2} x_2^2 + \sum_{m}^{0\cdots r} m b_m x_1^{m-1}) x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_1^m = 0 \\ \sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_4 + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_1^m = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà r soluzioni per x_1, la seconda per ogni valore di x_1 dato dalla prima dà un valore per x_2, la terza per ognuna delle r coppie di valori x_1 x_2 dà un valore per x_3, la quarta per ogni valore di x_1 dato dalla prima dà un valore per x_4; dunque:

In quest'algebra il sistema e l'equazione $F(x) = 0$ *ammettono, in generale,* r *soluzioni; in particolare potrebbero anche averne infinite o nessuna.*

9. *Un polinomio di grado* r, *nell'algebra del XVI tipo è:*

$$F(x) = [\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m]\, u_1 + [(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m]\, u_2 + [\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\, x_3 +$$

$$+ \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_1^m]\, u_3 + [(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_4 + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_1^4]\, u_4$$

e la risoluzione dell'equazione $F(x) = 0$ dipende dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\ (\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0 \\ (\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_3 + \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_1^m = 0 \\ (\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1})\, x_4 + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_1^4 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà r valori per x_1, la seconda, la terza e la quarta per ogni valore di x_1 dato dalla prima danno un valore per x_2, x_3 e x_4, perciò:

In quest' algebra il sistema e l' equazione $F(x) = 0$ *ammettono, in generale,* r *soluzioni; può anche avvenire che ne ammettono infinite o nessuna.*

Algebre del 4° ordine, dotate di modulo, non commutative.

10. Un polinomio di grado r, a destra (a sinistra), nell'algebra non commutativa, tipo VI è:

$$F(x)=\left[\sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} + \sum_m^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1}\right] u_1 +$$

$$+\left[\sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} + \sum_m^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i}\right] u_2 +$$

$$+\left[\left(\sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-i-1)!\,i!} x_1^{m-i-1} x_2^{i}\right) x_3 + (-)\left(\sum_m^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-i-1)!\,i!} x_1^{m-i-1} x_2^{i}\right) x_3 +\right.$$

$$\left. + \sum_m^{0\cdots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} - (+) \sum_m^{0\cdots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1}\right] u_3 +$$

$$+ \sum_m^{0\cdots r} d_m x_4^m \Big] u_4$$

e la risoluzione dell'equazione $F(x) = 0$ dipende dalla risoluzione del sistema che si ottiene uguagliando a zero le quattro coordinate di $F(x)$.

Dalle prime due equazioni di grado r in x_1 e x_2 si ricavano r^2 soluzioni e per ogni coppia di valori $x_1^{(i)}\, x_2^{(j)}$ la terza dà un valore per x_3; la quarta dà poi r valori per x_4. Dunque:

In quest' algebra l' equazione di grado r *a destra* (a sinistra) $F(x) = 0$ *ammette, in generale,* r^3 *soluzioni; potrebbe anche averne infinite o nessuna.*

Se l'equazione $F(x) = 0$ è speciale, il sistema diventa:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_2 + b_1 x_2 + a_2 (x_1 \mp x_2)^2 + a_3 (x_1 \mp x_2)^3 + \ldots a_r (x_1 \mp x_2)^r = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + a_1 x_2 \mp a_2 (x_1 - x_2)^2 \mp a_3 (x_1 - x_2)^3 \ldots \mp a_r (x_1 - x_2)^r = 0 \\ (a_1 \mp b_1 x_2 + \sum_m^{0 \ldots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} \mp \\ \qquad \pm \sum_m^{0 \ldots r} c_m \sum \frac{m!}{m-2i-1)!\,(2i+1)!} x^{m-2i} x_2^{2i+1} = 0 \\ \sum_m^{0 \ldots r} d_m x_1^m = 0 \end{cases}$$

in cui i segni superiori si riferiscono all'equazione speciale a destra e quelli inferiori all'equazione speciale a sinistra.

Nel primo caso sommando le prime due equazioni si ha:

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) x_1 + (a_1 + b_1) x_2 = 0 \ , \quad \text{da cui}$$

$$x_1 + x_2 = - \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}$$

Sostituendo nella prima equazione $x_1 = - x_2 - \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}$ si ha un'equazione di grado r in x_2; dunque le prime due equazioni in x_1 e x_2 dànno r soluzioni; la terza equazione dà un valore per x_3 per ognuna delle r coppie $x_1\ x_2$, la quarta dà r soluzioni per x_4, perciò:

In quest'algebra, tipo VI, l'equazione speciale a destra ha r^2 *soluzioni.*

Nel secondo caso sottraendo membro a membro le prime due equazioni si ha:

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) x_1 - (a_1 - b_1) x_2 = 0$$

da cui $x_1 = x_2 + \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}$ e ragionando sopra si ha:

L'equazione speciale a sinistra ha, come per l'equazione speciale a destra, r^2 *soluzioni.*

11. Nell'algebra del 4° ordine non commutativa, dotata di modulo, tipo VII, l'equazione $F(x) = 0$ porta alla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases}
\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!}\, x_1^{m-2i} x_2^{2i} + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-2i+1)!\,(2i-1)!}\, x_1^{m-2i+1} x_2^{2i-1} = 0 \\
\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-2i+1)!\,(2i-1)!}\, x_1^{m-2i} x_2^{2i-1} + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!}\, x_1^{m-2i+1} x_2^{2i} = 0 \\
\left(\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-i)!\,(i-1)!}\right) x_3 \pm \left(\sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-i)!\,(i-1)!}\, x_1^{m-i} x_2^{i-1}\right) x_3 + \\
+ \sum_{m}^{0\cdots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!}\, x_1^{m-2i} x_2^{2i} \mp \sum_{m}^{0\cdots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i+1)!\,(2i-1)!}\, x_1^{m-2i+1} x_2^{2i-1} = 0 \\
\left(\sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{m!}{(m-i)!\,(i-1)!}\, x_1^{m-i} x_2^{i-1}\right) x_4 + \left(\sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-i)!\,(i-1)!}\, x_1^{m-i} x_2^{i-1}\right) x_4 + \\
+ \sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!}\, x_1^{m-2i} x_2^{2i} + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{m!}{(m-2i+1)!\,(2i-1)!}\, x_1^{m-2i+1} x_2^{2i-1} = 0
\end{cases}$$

Le prime due equazioni di grado r in x_1 e x_2 ammettono r^2 soluzioni; per ognuna delle r^2 coppie di valori $x_1^{(i)}\ x_2^{(j)}$ la terza dà un valore per x_3 e la quarta un valore per x_4.

Dunque: *In quest' algebra l' equazione di grado* r *a destra (a sinistra)* $F(x) = 0$ *ammette in generale* r^2 *soluzioni; potrebbe anche averne infinite o nessuna.*

Se l'equazione $F(x) = 0$ è speciale le prime due equazioni del sistema diventano come le prime due equazioni del sistema speciale del caso precedente e perciò ammettono r coppie di volori $x_1^{(i)}\ x_2^{(i)}$ (i variabile da 1 ad r); la terza equazione dà un valore per x_3 per ogni coppia di valori di x_1 e x_2 e la quarta dà un valore per x_4 per ogni coppia di valori di x_1 e x_2. Perciò:

In quest' algebra, tipo VII, l' equazione speciale a destra (a sinistra) $F(x) = 0$ *ha, in generale,* r *soluzioni.*

12. Nell'algebra del quart'ordine, non commutativa, dotata di modulo, tipo IX, l'equazione $F(x) = 0$ porta alla risoluzione del sistema:

$$\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0$$

$$\left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0$$

$$\left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_3 + \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_1^m = 0$$

$$\left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_4 + \sum_{m}^{0\cdots r} a_m \frac{m!}{(m-2)!\,2!} x_1^{m-2} x_2^2 + \sum \rho a_m \frac{m!}{(m-2)!\,2!} x^{m-2} x_3^2 +$$

$$+ \sum_{m}^{0\cdots r} a_m \frac{m!}{(m-2)!} x_1^{m-2} x_2 x_3 + \sum_{m}^{0\cdots r} m\, b_m x_1^{m-1} x_2 \pm \sum_{m}^{0\cdots r} m b_m x_1^{m-1} x_3 \mp \sum_{m}^{0\cdots r} m c_m x_1^{m-1} x_2 +$$

$$+ \sum_{m}^{0\cdots r} \rho\, m c_m x_1^{m-1} x_3 + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_1^m = 0$$

La prima equazione è di grado r in x_1 e ammette, in generale, r soluzioni, la seconda per ognuno degli r valori di x_1 dà un valore per x_2, la terza per ognuno degli r valori di x_1 dà un valore per x_3, la quarta per ognuna delle r terne di valori di $x_1\ x_2\ x_3$ dà un valore per x_4, dunque:

In quest' algebra l' equazione di grado r *a destra* (a sinistra, F x) = 0 ***ammette, in generale,*** r ***soluzioni.***

Se l'equazione è speciale è $a_m = 0$ per $m = 2, 3 \ldots$, perciò la prima equazione diventa di 1° grado e ammette una sola soluzione, e si può asserire:

In quest' algebra, tipo IX, l' equazione speciale a destra (a sinistra) F (x) = 0 ***ha, in generale, una soluzione,*** ovvero r°.

13. Nell' algebra del quart'ordine, non commutativa, dotata di modulo, tipo XII, la risoluzione dell' equazione $F(x) = 0$ porta alla risoluzione d' un sistema di quattro equazioni, ciascuna di grado r, nelle quattro incognite $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, perciò tale sistema ammette r^4 soluzioni. Si può dire che:

Nell' algebra del 4.° ordine, tipo XII, l' equazione di grado r *a destra (a sinistra)* F(x) = 0 *ammette, in generale,* r^4 *soluzioni.*

In quest' algebra non vi sono equazioni speciali.

14. Nell'algebra del 4° ordine non commutativa, tipo XII la risoluzione dell'equazione a destra (a sinistra) $F(x) = 0$ porta alla risoluzione del sistema:

$$\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-r_i)(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} - \sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} = 0$$

$$\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{(-1)^i m!}{m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} = 0$$

$$\left(\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i}\right) x_3 - \left(\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-2)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-2} x_2^{2i+1}\right) x_4$$

$$\mp \left(\sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i}\right) x_3 \mp \left(\sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum (-1)^i x_1^{m-2i-2} x_2^{2i+1}\right) x_4$$

$$+ \sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2} x_2^{2i} \pm \sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} = 0$$

$$\left(\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i}\right) x_3 + \left(\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-2)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-2} x_2^{2i+1}\right) x_4$$

$$\pm \left(\sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i}\right) x_3 \mp \left(\sum_{m}^{0\cdots r} b_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-2)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-2} x_2^{2i+1}\right) x_4$$

$$\mp \sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} + \sum d_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} = 0$$

Le prime due equazioni sono di grado r in x_1 e x_2, dànno perciò r^2 soluzioni. La terza e la quarta equazione per ognuna delle r^2 coppie di valori x_1 x_2 dànno un sistema di primo grado nelle due incognite x_3 e x_4; dunque:

In quest'algebra l'equazione di grado r *a destra* (a sinistra) F(x)=0 *ha* r^2 *soluzioni.*

Se l'equazione è speciale il sistema diventa:

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 x_1 - b_1 x_2 = 0 \\
a_1 x_2 + b_0 + b_1 x_1 = 0 \\
a_1 x_2 \mp b_1 x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} c_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} \pm \\
\qquad \pm \sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} = 0 \\
a_1 x_1 \pm b_1 x_2 \mp \sum_{m}^{0\cdots r} c_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} + \\
\qquad + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m \sum \frac{(-1)^i m!}{(m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} = 0
\end{cases}
$$

Le prime due equazioni dànno una coppia di valori per x_1 e x_2, la terza e la quarta per questa coppia di valori di x_1 e x_2 dànno una coppia di valori per x_3 e x_4, dunque:

Nell' algebra del 4° *ordine, tipo XIII, l' equazione speciale a destra (a sinistra)* $F(x) = 0$ *ammette, in generale, una soluzione, ovvero* r°.

15. Nell' algebra del 4° ordine non commutativa, tipo XIV, per risolvere l'equazione a destra (a sinistra) $F(x) = 0$, occorre risolvere il sistema:

$$
\begin{cases}
\sum_{m}^{0\cdots r} a_m x_1^m = 0 \\
\left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} b_m x_1^m = 0 \\
\left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_3 + \sum_{m}^{0\cdots r} c_m x_1^m = 0 \\
\left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, a_m x_1^{m-1}\right) x_4 + \left(\sum_{m}^{0\cdots r} a_m \frac{m!}{(m-2)!} x_1^{m-2} x_2\right) x_3 \pm \left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, b_m x_1^{m-1}\right) x_3 \\
\qquad \mp \left(\sum_{m}^{0\cdots r} m\, c_m x_1^{m-1}\right) x_2 + \sum_{m}^{0\cdots r} d_m x_1^m = 0
\end{cases}
$$

La prima equazione da r valori per x_1, la seconda per ogni valore di x_1 dà un sol valore per x_2, la terza per ogni valore di x_1 dà un sol valore per x_3, la quarta per ognuna delle r terne di valori $x_1\ x_2\ x_3$ dà un valore per x_4, dunque:

Nell'algebra tipo XIV l'equazione a destra (a sinistra) $\mathrm{E}(x)=0$ *ammette* r *soluzioni, se è di grado* r.

Se l'equazione è speciale, il sistema diventa:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 = 0 \\ a_1 x_2 + \sum_m^{0\cdots r} b_m x_1^{\,m} = 0 \\ a_1 x_3 + \sum_m^{0\cdots r} c_m x_1^{\,m} = 0 \\ a_1 x_4 \pm (\Sigma m b_m x_1^{\,m-1}) x_3 \mp (\Sigma m c_m x_1^{\,m-1}) x_2 + \sum_m^{0\cdots r} d_m x_1^{\,m} = 0 \end{cases}$$

e, come si vede, il sistema ammette una sola soluzione. *Dunque*: *Nell'algebra tipo* XIV *l'equazione speciale a destra* (*a sinistra*) $F(x)=0$ *ammette una sola soluzione, ovvero* r^0.

16. Nell'algebra non commutativa, tipo XV, per risolvere l'equazione a destra (a sinistra) $F(x)=0$ occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{\,m-2i} x_2^{\,2i} + \sum_m^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{\,m-2i-1} x_2^{\,2i+1} = 0 \\ \sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{\,m-2i-1} x_2^{\,2i+1} + \sum_m^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{\,m-2i} x_2^{\,2i} - 0 \\ \left(\sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-i)!\,i!} x_1^{\,m-i-1} x_2^{\,i}\right) x_3 \pm \left(\sum_m^{0\cdots r} b_m \sum \frac{m!}{(m-i-1)!\,i!} x_1^{\,m-i-1} x_2^{\,i}\right) x_2 + \\ + \sum_m^{0\cdots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{\,m-2i} x_2^{\,2i} \mp \sum_m^{0\cdots r} c_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{\,m-2i-1} x_2^{\,2i+1} = 0 \\ \left(\sum_m^{0\cdots r} a_m \sum \frac{m!}{(m-i)!\,i!} x_1^{\,m-i-1} x_2^{\,i}\right) x_4 \pm \left(\sum_m^{0\cdots r} b_m \frac{m!}{(m-i)!\,i!} x_1^{\,m-i-1} x_2^{\,i}\right) x_3 + \\ + \sum_m^{0\cdots r} d_m \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{\,m-2i} x_2^{\,2i} \mp \sum d_m \sum \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_1^{\,m-2i-1} x_2^{\,2i+1} = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono di grado r in x_1 e x_2 perciò daranno r^2 soluzioni; per ogni coppia di valori x_1 x_2 la terza e la quarta daranno rispettivamente un valore per x_3 e un valore per x_4.

Perciò: *In tale algebra l'equazione di grado* r $F(x) = 0$ *ammette* r^2 *soluzioni.*

Se l'equazione è speciale essendo $a_m = \mp b_m$ il sistema diventa come per l'algebra tipo VI e tipo VII e perciò:

L'equazisne speciale di grado r, *nell'algebra tipo XV, e ammette, in generale,* r *soluzioni.*

17. Elementi pseudonulli e sottoalgebre eccezionali nelle algebre del 4° ordine, dotate di modulo.

Vogliamo controllare quanto è stato affermato dal prof. Spampinato:

In una qualunque algebra complessa, dotata di modulo, una generica equazione di grado r *ammette un numero finito di radici e questo numro è dato da una potenza* r^s, *del grado* r *dell'equazione. L'intero* s *è un carattere dell'algebra ed è uguale alla differenza fra l'ordine dell'algebra e l'ordine della sua sottoalgebra eccezionale.*

Un elemento $x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ non nullo, cioè con x_1, x_2, x_3, x_4 non tutti e tre nulli, è pseudonullo quando è nulla qualche sua potenza. Ora nell'algebre del 1.° tipo la potenza m.^{ma} di x è data da:

$$x^m = x_1^m u_1 + x_2^m u_2 + x_3^m u_3 + x_4^m u_4$$

e per essere $x^m = 0$ dev'essere $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. dunque in quest'algebra *non vi sono elementi pseudonulli, nè sottoalgebra eccezionale, perciò la caratteristica è 4, e difatti l'equazione* $f(x) = 0$ *di grado* r *ha* r^4 *soluzioni.*

18. Nell'algebra del 2.° tipo è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + x_3^m u_3 + x_4^m u_4$$

e per essere $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. In questa ipotesi per $m \geq 2$ è $x^m = 0$. Dunque gli elementi pseudonulli in quest'algebra sono tutti e solo gli elementi del tipo x_2u_2 con $x_2 = 0$. Essi costituiscono una sottoalgebra, anzi uno zero-algebra poichè il prodotto di due elementi qualunque, essendo $u_2^2 = 0$, è zero.

Tale sottoalgebra è la sottoalgebra eccezionale perchè ogni suo elemento moltiplicato per un elemento qualunque dell'algebra dà un elemento nullo o pseudonullo. Difatti:

$$x_2u_2 \cdot x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_1u_2.$$

Dunque: *la sottoalgebra eccezionale, costituita degli elementi ecce-*

zionali è una zero algebra di ordine 1. Essa è costituita degli elementi $x_2 u_2$. *Gli elementi pseudonulli dell'algebra sono tutti e solo gli elementi non nulli della sua sottoalgebra eccezionale. La caratteristica di quest'algebra è* $4 - 1 = 3$ *e l'equazione* $F(x) = 0$ *ha, in generale* r^3 *soluzioni.*

19. Nell'algebra del III tipo è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + x_3^m u_3 + m x_3^{m-1} x_4 u_4$$

e per essere $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_3 = 0$. In questa ipotesi per $m \geq 2$ è $x^m = 0$. Dunque gli elementi pseudonulli in quest'algebra sono tutti e solo gli elementi del tipo

$$x_2 u_2 + x_4 u_4 \text{ con } x_2 \text{ e } x_4$$

non contemporaneamente nulli. Essi costituiscono uno zero-algebra poichè il prodotto di due elementi qualunque è zero essendo $u_2^2 = u_4^2 = u_2 u_4 = u_4 u_2 = 0$. Tale zero-algebra è la sottoalgebra eccezionale poichè:

$$(x_2 u_2 + x_4 u_4)(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4) = x_2 x'_1 u_2 + x_4 x'_3 u_4.$$

Perciò: *la sottoalgebra eccezionale, costituita dagli elementi eccezionali è una zero-algebra di ordine 2. Essa è costituita degli elementi* $x_2 u_2 + x_4 u_4$. *Gli elementi pseudonulli dell'algebra sono tutti e solo gli elementi non nulli della sua sottoalgebra eccezionale. La caratteristica di quest'algebra è* $4 - 2 = 2$ *e l'equazione* $F(x) = 0$ *ha in generale* r^2 *soluzioni.*

20. Nell'algebra del IV tipo:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + \left(m x_1^{m-1} x_3 + \frac{m!}{(m-2)!2!} x_1^{m-2} x_2^2 \right) u_3 + x_4^m u_4$$

e per essere $x^m = 0$ è necessario che sia se $m = 2$ $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ e se $m > 2$ $x_1 = x_4 = 0$. Nella prima ipotesi è $x^m = 0$ per $m \geq 2$, nella seconda ipotesi è $x^m = 0$ per $m > 2$. Dunque gli elementi pseudonulli di grado 1 sono gli elementi del tipo $x_2 u_3$, gli elementi pseudonulli di grado 2 sono gli elementi del tipo $x_2 u_2 + x_3 u_3$. I primi costituiscono uno zero-algebra di ordine 1 e di indice 2; i secondi una sottoalgebra invariante di indice 3 e di ordine 2.

Questa seconda sottoalgebra è la sottoalgebra eccezionale in quantò che:

$$(x_2 u_2 + x_3 u_3)(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4) = x_2 x'_1 u_2 + (x_2 x'_2 + x_3 x'_2) u_3.$$

Perciò: *La sottoalgebra eccezionale è un'algebra di indice 3 e di*

ordine 2. Essa è costituita degli elementi $x_2u_2 + x_3u_3$. *Gli elementi pseudonulli dell'algebra sono, oltre gli elementi della sottoalgebra eccezionale, gli elementi del tipo* x_3u_3 *che costituiscono una zero-algebra. La caratteristica di quest'algebra è* $4-2=2$ *e l'equazione* $F(x)=0$ *ha in generale* r^2 *soluzioni.*

21. Nell'algebra del V tipo è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + \left[m x_1^{m-1} x_3 + \frac{m!}{(m-2)!\,2!} x^{m-2} x_2^2 \right] u_3 +$$

$$+ \left[m x_1^{m-1} x_4 + \frac{m!}{(m-2)!} x_1^{m-2} x_2 x_3 + \frac{m!}{(m-3)!\,3!} x_1^{m-3} x_2^3 \right] u_4 .$$

Per essere $x^m = 0$ è necessario che sia, se $m \leq 3$, $x_1 = x_2 = 0$ e se $m > 3$ basta che sia $x_1 = 0$. Nella prima ipotesi è $x^m = 0$ per $m \geq 2$ nella seconda ipotesi è $x^m = 0$ per $m > 3$. Dunque gli elementi pseudonulli di grado 1 sono gli elementi del tipo $x_3u_3 + x_4u_4$, e quelli di grado 3 sono gli elementi del tipo $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$. I primi costituiscono uno zero-algebra di ordine 1 e d'indice 2; i secondi una sottoalgebra invariante di indice 4 e di 3.° ordine. Questa seconda sottoalgebra è la sottoalgebra eccezionale, difatti:

$$(x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_4u_4 + (x_2x'_2 +$$
$$+ x_3x'_4)u_3 + (x_2x'_3 + x_3x'_2 + x_4x'_4)u_4 .$$

Dunque: *La sottoalgebra eccezionale è un'algebra di indice 4 e di ordine 3. Essa è costituita degli elementi* $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$. *Gli elementi pseudonulli dell'algebra sono, oltre gli elementi della sottoalgebra eccezionale, gli elementi del tipo* $x_3u_3 + x_4u_4$ *che costituiscono una zero-algebra di 2.° ordine. La caratteristica di quest'algebra è* $4-3=1$ *e difatti l'equazione* $F(x)=0$ *di grado* r *ha in generale,* r *soluzioni.*

22. Nell'algebra dell'VIII tipo è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + m x_1^{m-1} u_3 + x_3 u_4 .$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_4 = 0$. Perciò gli elementi pseudonulli in quest'algebra sono tutti e solo gli elementi del tipo

$$x_2u_2 + x_3u_3 \text{ con } x_2 \text{ e } x_3$$

non contemporaneamente nulli. Essi costituiscono una zero-algebra. Tale zero-algebra è la sotto-algebra eccezionale poichè

$$(x_2u_2 + x_3u_3)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_4u_3 + x_3x'_4u_3 .$$

Perciò: *La sottoalgebra eccezionale è una zero-algebra di ordine 2. Essa è costituita degli elementi* $x_2u_2 + x_3u_3$. *Gli elementi pseudonulli dell'algebra sono tutti e solo gli elementi non nulli della sua sottoalgebra eccezionale. La caratteristica di quest'algebra è* $4 - 2 = 2$ *e l'equazione* $F(x) = 0$ *ha, in generale,* r^2 *soluzioni.*

23. Nell'algebra del X tipo è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + m x_1^{m-1} x_3 u_3 + \\ + \left[m x_1^{m-1} x_4 + \frac{m!}{(m-2)!2!} x_1^{m-2} x_2^2 + \frac{m!}{(m-2)!2!} x_1^{m-2} x_3^2 \right] u_4 .$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia se $m = 2$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e se $m > 2$ $x_1 = 0$. Nella prima ipotesi è $x^m = 0$ per $m \geq 2$, nella seconda ipotesi è $x^m = 0$ per $m > 2$. Perciò gli elementi pseudonulli di 1.° grado sono gli elementi del tipo x_4u_4, mentre gli elementi pseudonulli di 2.° grado sono gli elementi del tipo $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$. I primi costituiscono una zero-algebra di 1.° ordine e di indice 2; i secondi una sottoalgebra di indice tre e di ordine tre. Questa seconda è la sottoalgebra eccezionale in quanto che:

$$(x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_1u_2 + x_3x'_1u_3 + \\ + (x_2x'_2 + x_3x'_3 + x_4x'_1)u_4 .$$

Dunque: *La sottoalgebra eccezionale è un algebra di indice tre e di ordine tre. Essa è costituita degli elementi* $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$. *Gli elementi pseudonulli dell' algebra sono, oltre gli elementi della sottoalgebra eccezionale, gli elementi del tipo* x_4u_4 *che costituiscono una zero-algebra di 1.° ordine. La caratteristica di quest' algebra è* $4 - 3 = 1$ *e difatti l'equazione* $F(x) = 0$ *di grado* r *ha, in generale,* r *soluzione.*

24. Nell'algebra dell'XI tipo è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + \left(m x_1^{m-1} x_3 + \frac{m!}{(m-2)!2!} x_1^{m-2} x_2^2 \right) u_3 + m x_1^{m-1} x_4 u_4 .$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia se $m = 2$ $x_1 = x_2 = 0$ e se $m > 2$ $x_1 = 0$. Nella prima ipotesi è $x^m = 0$ per $m \geq 2$, nella seconda ipotesi è $x^m = 0$ per $m > 2$. Perciò gli elementi pseudonulli di 1.° grado sono gli elementi del tipo $x_3u_3 + x_4u_4$, mentre gli elementi pseudonulli di 2.° grado sono del tipo $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$. I primi costituiscono una zero-algebra di 2.° grado e d'indice 2; i secondi una sottoalgebra di indice

tre e di ordine tre. Questa seconda è la sottoalgebra eccezionale poichè:

$$(x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_1u_2 + \\ + (x_2x'_2 + x_3x'_1)u_3 + x_4x'_1u_4.$$

Dunque: *La sottoalgebra eccezionale è identica alla sottoalgebra eccezionale del tipo X. Gli elementi pseudonulli sono, oltre gli elementi della sottoalgebra eccezionale, gli elementi del tipo* $x_3u_3 + x_4u_4$ *che costituiscono la zero-algebra di 2° ordine. La caratteristica di quest'algebra è* $4-3=1$ *e difatti l'equazione* $F(x)=0$ *di grado* r *ha, in generale* r *soluzioni.*

25. Nell'algebra del tipo XVI si ha:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + m x_1^{m-1} x_3 u_3 + m x_1^{m-1} x_4 u_4$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = 0$. Perciò gli elementi pseudonulli in quest'algebra sono tutti e solo gli elementi del tipo:

$x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ con x_2, x_3 e x_4 non contemporaneamente nulli.

Essi costituiscono una zero-algebra. Tale zero-algebra è la sottoalgebra eccezionale perchè:

$$(x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_1u_2 + x_3x'_1u_3 + x_4x'_1u_4$$

Dunque: *La sottoalgebra eccezionale è identica alla sottoalgebra eccezionale del tipo precedente. Gli elementi pseudonulli sono tutti e solo gli elementi di questa sottoalgebra eccezionale. La caratteristica è anche qui* $4-3=1$ *è l'equazione* $F(x)=0$ *di grado* r, *ha* r *soluzioni.*

Algebre non commutative.

26. Nell'algebra del tipo VI la potenza m^{ma} di x è:

$$x^m = \left(\sum \frac{m!}{m-2i!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i}\right)u_1 + \left(\sum \frac{m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1}\right)u_2 + \\ + \left(\sum \frac{m!}{(m-i-1)!\,i!} x_1^{m-i-1} x_2^{i} x_3\right)u_3 + x_3^m u_4$$

Affinchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, perciò gli elementi pseudonulli sono tutti e solo gli elementi x_4u_4 i quali costituiscono una zero-algebra e poichè:

$$x_4u_4(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = (x_4x'_1 - x_4x'_2)u_3$$

e

$$(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4)x_4u_4 = (x'_1x_4 + x'_2x_4)u_4$$

si può concludere:

La sottoalgebra eccezionale è di indice 2 e ordine 1. Essa è costituita degli elementi $x_3 u_3$. *Gli elementi pseudonulli sono tutti e solo gli elementi della sottoalgebra eccezionale. La caratteristica di quest'algebra è* $4-1=3$ *e un'equazione generica* $F(x)=0$ *di grado* r *ha* r^3 *soluzioni.*

27. Nell'algebra del tipo VII la potenza m^{ma} di $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$ è:

$$x^m = \left[\sum_i \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!}\, x_1^{m-2i} x_2^{2i}\right] u_1 + \left[\sum_i \frac{m!}{(m-2i+1)!\,(2i-1)!}\, x_1^{m-2i+1} x_2^{2i-1}\right] u_2 +$$

$$+ \left[\sum_i \frac{m!}{(m-i)!\,(i-1)!}\, x_1^{m-i} x_3^{i-1}\right] u_3 + \left[\sum_i \frac{m!}{(m-i)!\,(i-1)!}\, x_1^{m-i} x_4^{i-1}\right] u_4$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_2 = 0$ e gli elementi pseudonulli sono tutti e solo gli elementi $x_3 u_3 + x_4 u_4$ i quali costituiscono una zero algebra e poichè:

$$(x_3 u_3 + x_4 u_4)(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4) = (x_3 x'_1 - x_3 x'_3) u_3 + (x_4 x'_1 + x_4 x'_2) u_4$$

$$(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4)(x_3 u_3 + x_4 u_4) = (x'_1 x_3 + x'_2 x_3) u_3 + (x'_1 x_4 + x'_2 x_4) u_4$$

si può dire: *La sottoalgebra eccezionale è di indice 2 e ordine 2. Essa è costituita degli elementi* $x_3 u_3 + x_4 u_4$. *Gli elementi pseudonulli sono tutti e solo gli elemedli della sottoalgebra eccezionale. La caratteristica di quest'algebra è* $4-2=2$ *e l'equazione di grado* r, $F(x)=0$ *ha, in generale,* r^2 *soluzioni.*

28. Nell'algebra del tipo IX si ha:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + m x_1^{m-1} x_3 u_3 + \left(m x_1^{m-1} x_4 + \frac{m!}{(m-2)!\,2!}\, x_1^{m-2} x_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho\, m!}{(m-2)!\,2!}\, x_1^{m-2} x_3^2 + \frac{m!}{(m-2)!}\, x_3^{m-2} x_2 x_3\right) u_4$$

Perchè sia $x^m = 0$ per $m \geq 2$ dev'essere $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e per $m > 2$ basta che sia $x_1 = 0$. Dunque gli elementi pseudonulli di 1° grado sono quelli del tipo $x_4 u_4$ e costituiscono una zero algebra, ossia una sottoalgebra pseudonulla di indice 2; gli elementi pseudonulli di 2° grado sono quelli del tipo $x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$ e costituiscono una sottoalgebra pseu-

donulla di indice 3. Poichè:

$$(x_2u_2+x_3u_3+x_4u_4)(x'_1u_1+x'_2u_2+x'_3u_3+x'_4u_4)=$$
$$x_2x'_1u_2+x_3x'_1u_3+(x_2x'_2+x_3x'_3+x_4x'_4-\rho x_3x'_3+x_4x'_4)u_4$$

e $(x'_1u_1+x'_2u_2+x'_3u_3+x'_4u_4)(x_2u_2+x_3u_3+x_4u_4)=x'_1x_2u_2+x'_1x_3u_3+$
$+(x'_1x_4+x'_2x_2+x'_3x_3-x'_3x_2+\rho x'_3x_3)u_4$

Si ha: *La sottoalgebra eccezionale è di ordine 3 e indice 3. Gli elementi pseudonulli sono quelli della sottoalgebra eccezionale e quelli del tipo x_4u_i che costituiscono una zero-algebra. La caratteristica è $4-3=1$ e un'equazione generica di grado r, $F(x)=0$ ha r soluzioni.*

29. Nell'algebra del tipo XII è:

$$x^m\left[\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho_1!(2\rho_2)!(2\rho_3)!(2\rho_4)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2}x_3^{2\rho_3}x_4^{2\rho_4}-\right.$$
$$\left.\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho!(2\rho_2+1)!(2\rho_3+1)!(2\rho_4+1)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2+1}x_3^{2\rho_3+1}x_4^{2\rho_4+1}\right]u_1+$$
$$+\left[\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho_1!(2\rho_2+1)!(2\rho_3)!(2\rho_4)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2+1}x_3^{2\rho_3}x_4^{2\rho_4}+\right.$$
$$\left.\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho_1!(2\rho_2)!(2\rho_3+1)!(2\rho_4+1)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2}x_3^{2\rho_3+1}x_4^{2\rho_4+1}\right]u_2+$$
$$+\left[\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho_1!(2\rho_2)!(2\rho_3+1)!(2\rho_4)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2}x_3^{2\rho_3+1}x_4^{2\rho_4}+\right.$$
$$\left.\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho_1!(2\rho_2+1)!(2\rho_3)!(2\rho_4+1)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2+1}x_3^{2\rho_3}x_4^{2\rho_4+1}\right]u_3+$$
$$+\left[\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4}m!}{\rho_1!(2\rho_2)!(2\rho_3)!(2\rho_4+1)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2}x_3^{2\rho_3}x_4^{2\rho_4+1}+\right.$$
$$\left.\sum\frac{(-1)^{\rho_2+\rho_3+\rho_4m!}}{\rho_1!(2\rho_2+1)!(2\rho_3+1)!(2\rho_4)!}x_1^{\rho_1}x_2^{2\rho_2+1}x_3^{2\rho_3+1}x_4^{2\rho_4}\right]u_4$$

Come si vede x^m non è zero se non è $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, dunque: *In quest'algebra non vi sono elementi pseudonulli, non vi è sottoalgebra eccezionale, perciò la caratteristica è 4 e un'equazione generica di grado r $F(x)=0$ ha r^4 soluzioni.*

29. Nell'algebra tipo XIII è:

$$x^m = \sum_i (-1)^i \frac{m!}{(m-2i)!\,(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} u_1 +$$

$$+ \sum_i (-1)^i \frac{m!}{(m-2i-1)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i+1} u_2 +$$

$$+ \left[\left(\sum_i (-1)^i \frac{m!}{(m-2i-1)!\,(2i)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i} \right) x_3 - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_i (-1)^i \frac{m!}{(m-2i-2)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-2} x_2^{2i+1} \right) x_4 \right] u_3 +$$

$$+ \left[\left(\sum_i (-1)^i \frac{m!}{(m-2i-1)!\,(2i)!} x_1^{m-2i-1} x_2^{2i} \right) x_4 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_i (-1)^i \frac{m!}{(m-2i-2)!\,(2i+1)!} x_1^{m-2i-2} x_2^{2i+1} \right) x_3 \right] u_4$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_2 = 0$. Perciò gli elementi pseudonulli sono gli elementi del tipo

$$x_3 u_3 + x_4 u_4$$ e costituiscono una zero-algebra.

Si ha:

$$(x_3 u_3 + x_4 u_4)(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4) = (x_3 x'_1 + x_4 x'_2) u_3 + (x_4 x'_1 - x_3 x'_2) u_4$$

e $$(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4)(x_3 u_3 + x_4 u_4) = x'_1 x_3 - x'_2 x_4) u_3 + (x'_1 x_4 + x'_2 x_3) u_4 .$$

Dunque:

In quest'algebra la sottoalgebra eccezionale è di indice e ordine 2. Gli elementi pseudonulli sono tutti e soli gli elementi di tale sottoalgebra. La caratteristica è $4 - 2 = 2$ *e difatti un'equazione generica di grado* r *ha* r *soluzioni.*

30. Nell'algebra del tipo XIV la potenza m.^{ma} di x è:

$$x^m = x_1^m u_1 + m x_1^{m-1} x_2 u_2 + m x_1^{m-1} x_3 u_3 + \left[m x_1^{m-1} x_4 + \frac{m!}{(m-2)!} x_1^{m-2} x_2 x_3 \right] u_4 .$$

Perchè sia $x^m = 0$ per $m \geq 2$ dev'essere o $x_1 = x_2 = 0$, oppure $x_1 = x_3 = 0$; per $m > 2$ basta che sia $x_1 = 0$. Gli elementi pseudonulli di 1.° grado sono del tipo $x_3 u_3 + x_4 u_4$ oppure $x_2 u_2 + x_4 u_4$ e costituiscono due zero-algebre di prim'ordine; gli elementi pseudonulli di 2.° grado sono

quelli del tipo $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ e costituiscono una sottoalgebra di indice 3 e ordine 3. Poichè si ha:

$$(x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = x_2x'_1u_2 + x_3x'_1u_3 + \\ + (x_2x'_3 - x_3x'_2 + x_1x'_4)u_4$$

$$(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4)(x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4) = x'_1x_2u_2 + x'_1x_3u_3 + \\ + (x'_1x_4 + x'_2x_3 - x'_3x_2)u_4$$

si può dire che:

La sottoalgebra eccezionale costituita degli elementi $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ *è di 3.° ordine e d'indice 3. Gli elementi pseudonulli sono quelli della sottoalgebra eccezionale e quelli dei tipi* $x_3u_3 + x_4u_4$ *o* $x_2u_2 + x_4u_4$. *La caratteristica è* $4 - 3 = 1$ *e un' equazione generica di grado* r *ha* r *soluzioni.*

29. Nell'algebra del tipo XV è:

$$x^m = \sum_i \frac{m!}{(m-2i)!(2i)!} x_1^{m-2i} x_2^{2i} u_1 + \sum_i \frac{m!}{(m-2i-1)!(2i+1)!} x_2^{m-2i-1} x_2^{2i+1} u_2 + \\ + \sum_i \frac{m!}{(m-i-1)!i!} x_1^{m-i-1} x_2^{i} x_3 u_3 + \sum_i \frac{m!}{(m-i-1)!i!} x_1^{m-i-1} x_2^{i} x_4 u_4 .$$

Perchè sia $x^m = 0$ è necessario che sia $x_1 = x_2 = 0$. Gli elementi pseudonulli sono solo gli elementi del tipo $x_3u_3 + x_4u_4$ e costituiscono una zero-algebra di 2.° ordine. Poichè si ha:

$$(x_3u_3 + x_4u_4)(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4) = (x_3x'_4 - x_3x'_3)u_3 + (x_4x'_4 - x_4x'_3)u_4$$

$$(x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4)(x_3u_3 + x_4u_4) = (x'_1x_3 + x'_2x_3)u_3 + (x'_1x_4 + x'_2x_4)u_4$$

si può dire che:

In quest'algebra la sottoalgebra eccezionale costituite dagli elementi $x_3u_3 + x_4u_4$ *è di indice 2 e ordine 3. Gli elementi pseudonulli sono tutti e solo gli elementi della sottoalgebra eccezionale. La caratterica è* $4 - 2 = 2$ *e un' equazione generica di grado* r *ha* r^2 *soluzioni.*

Calcolo di prismi a sezione rettangolare sollecitati a flessione semplice in regime non di Hooke.

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Sunto. — Si prosegue, nella presente nota, lo studio dei prismi costituiti di materiale che non segua la legge di Hooke. Si fa l'applicazione dei concetti esposti in una precedente nota al caso della sezione rettangolare sollecitata a flessione semplice, indicando la via più opportuna per eseguire, con l'ausilio di diagrammi, i calcoli di verifica e di progetto. Si esegue anche un paragone tra i risultati ottenuti applicando la teoria che si espone e quella abituale. In ultimo si fa notare come i nuovi concetti abbiano applicazione anche quando nei solidi elastici si producano deformazioni plastiche, purchè si rimanga nella fase ascendente del fenomeno.

1. — In una nostra precedente nota [1]), abbiamo dato le norme generali per il calcolo statico dei prismi costituiti di materiale che non segua la legge di Hooke.

Abbiamo indicati i metodi di calcolo relativi alle sollecitazioni di flessione semplice e di flessione composta per sezioni di forma generica; abbiamo anche stabilita la via da seguire per la determinazione delle incognite iperstatiche.

Vogliamo ora mostrare come quanto è stato da noi indicato in detta nota si applichi e si realizzi nei casi pratici più frequenti: a tale scopo esponiamo ora lo studio dei prismi a sezione rettangolare sottoposti a sollecitazione di flessione semplice, riservandoci di proseguire in altra occasione le ricerche per altre specie di sollecitazione e per altre forme di sezioni.

Faremo anche notare come la via da noi tracciata per lo studio del comportamento dei prismi dei quali ci occupiamo si presenta ricca di possibili applicazioni nel campo delle ricerche del comportamento dei materiali oltre il limite elastico, se pure in particolari condizioni.

2. — La difficoltà iniziale che si presenta nello studio del quale ci occupiamo è che bisogna conoscere, con sufficiente esattezza, la relazione

---

[1]) *Calcolo statico di prismi costituiti di materiali che non seguano la legge di Hooke.* Rendiconto della R. Accademia di Scienze Fis. e Matem. della Società Reale di Napoli. 1940-41.

che lega la σ alla ε, cioè la curva σ, ε, relativa al materiale del quale è costituito il prisma.

Non possiamo certamente, in questa sede, risolvere tale difficoltà, per sciogliere la quale occorrono lunghe, pazienti e non facili ricerche sperimentali. Ma importa notare che, poichè dal prosieguo della presente trattazione risulterà l'importanza pratica dello studio che conduciamo, con le percentuali non lievi di errori che possono commettersi quando in effetti il materiale non segua la solita legge di proporzionalità tra sforzi e deformazioni, appare chiara la necessità di affrontare tali ricerche sperimentali allo scopo di fornire gli elementi fisici, calcolabili in numeri, da servire di base alle ricerche che andiamo esponendo.

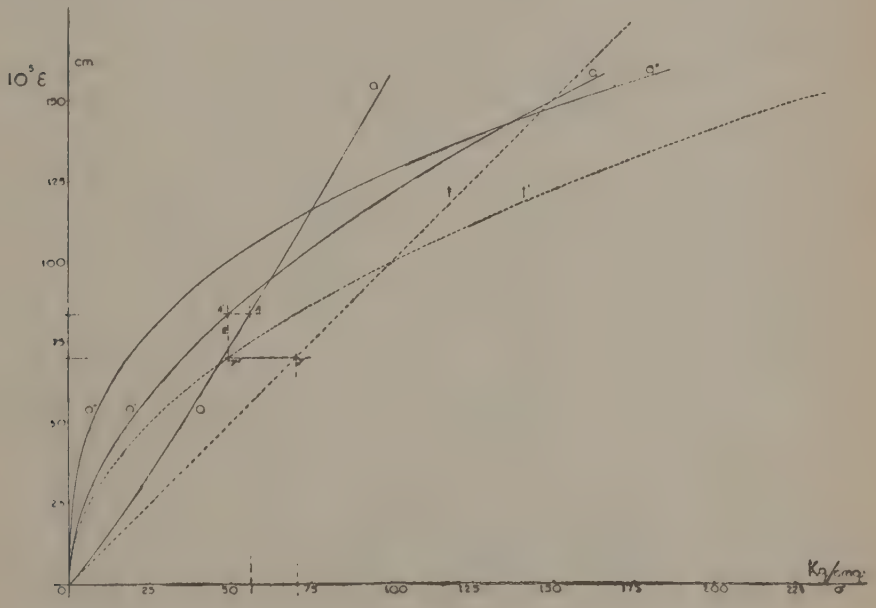


Fig. 1.

Allo stato, per mostrare appunto l'importanza pratica delle ricerche che conduciamo, e per indicare con la necessaria chiarezza il procedimento da seguire, abbiamo prescelto alcune curve ε, σ, rappresentative del fenomeno di deformazione corrispondenti a possibili casi concreti.

E propriamente, nella Fig. 1, assunto l'asse x quale asse delle σ, e quello y quale asse delle ε, abbiamo costruita la linea t, retta, rappresentativa della legge di Hooke:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \qquad (1)$$

con E costante ed eguale a 100.000 Kg/cmq. e quella a, curva, rappresentativa della legge :

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\,\sigma^{1,1} \qquad (2)$$

Tale curva sembra verificarsi in pratica, oltre che per la ghisa, per alcuni legnami.

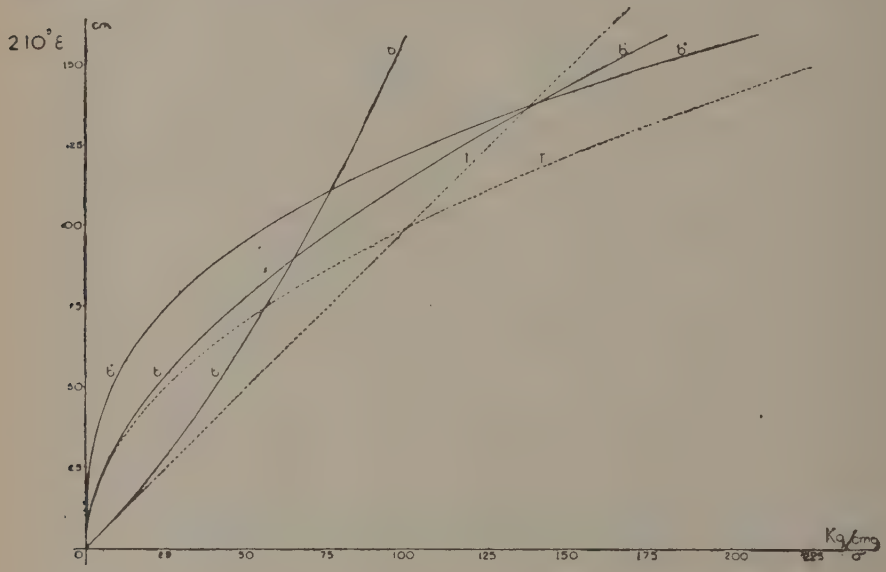


Fig. 2.

Nella Fig. 2, abbiamo costruito, oltre la retta rappresentativa della legge di Hooke con $E = 200.000$ Kg/cmq. la curva b che corrisponde alla :

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + p\right)\sigma \qquad (3)$$

dove p varia linearmente da 0 a $0{,}3.10^{-5}$ quando σ varia tra 0 e 100 Kg/cmq. rispettivamente. Nella Fig. 3 abbiamo ancora costruita, oltre la retta di Hooke, la curva c che corrisponde alla stessa (3) con p variabile però linearmente tra 0 e $0{,}5.10^{-5}$ quando σ varia linearmente tra 0 e 100 Kg/cmq. rispettivamente.

Tali curve si approssimano a quelle che, secondo Glanville [1]), corri-

[1]) Citato in Oberti, *Sul comportameto statico gli archi notevolmente ribassati, tipo ponte del Risorgimento.* Il Cemento Armato — 1939 n. 7.

spondono al comportamento elasto-viscoso del calcestruzzo a compressione, e possono poi corrispondere a quello di altri materiali, specie leguame. Nel caso presente, in effetti, non si tien conto del fatto che p sia un coefficiente di plasticità, dato che esaminiamo per ora il comportamento elastico del materiale, salvo quanto verrà precisato in fine. La legge sopra indicata è dunque per noi una qualsiasi legge che leghi ε e σ.

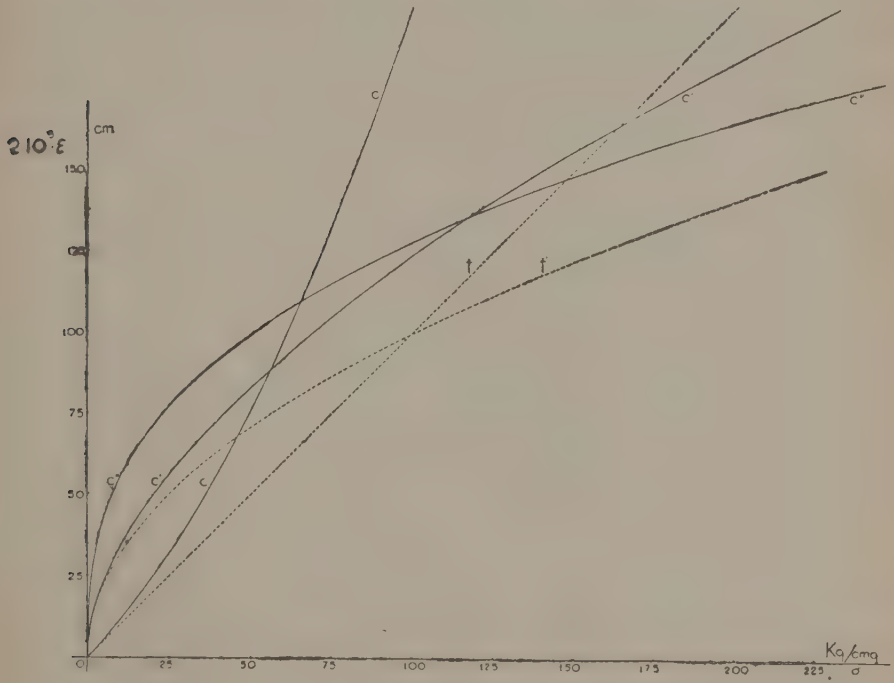


Fig. 3.

Per tutti e tre i casi facciamo poi l'ipotesi che il materiale si comporti a trazione secondo la legge di Hooke, escludendo quindi la considerazione del calcestruzzo; mentre si comporti a compressione secondo le leggi rappresentate dalle curve *a*, *b*, *c*, delle figg. 1, 2, 3.

Le leggi che legano ε e σ così supposte non hanno la pretesa di essere molto prossime a cogliere il vero comportamento di alcuni materiali; per raggiungere tale scopo occorrono, come si è detto in principio, numerose ed accuratissime ricerche sperimentali. Ma, mentre esse sembrano di tipo ammissibile per materiali che non seguano la legge di Hooke, ci permettono di porre in luce, ripetiamo, sia il modo secondo cui bisogna condurre il calcolo, in casi simili, sia l'importanza delle correzioni che, rispetto alla legge di Hooke, esse comportano.

Nella realtà, quando si intenda di studiare attentamente il comportamento meccanico di un materiale, occorrerà anzitutto procurarsi appunto curve che, con sufficiente approssimazione, rappresentino la legge che lega le ε alle σ, per il materiale in oggetto.

3. — Come abbiamo detto, noi facciamo la supposizione che il solido prismatico che studiamo sia sollecitato a flessione semplice. In tal caso, l'area complessiva del diagramma delle σ dev'essere nulla.

Considerando quindi il profilo della sezione e preso su esso un punto che rappresenti la traccia dell'asse neutro, abbiamo eseguito a partire da tal punto le integrazioni dei diagrammi ε, σ di trazione e di compressione, in tutte e tre le tavole, ottenendo le curve $a'\,t'$, $b'\,t'$, $c'\,t'$, rispettivamente nelle figg. 1, 2, 3.

Riferendoci, per fissare le idee, alla fig. 1, possiamo dire che tutte le parallele all'asse y tagliano le curve a', t' in due punti che corrispondono ad un caso di sollecitazione di flessione semplice.

Ad esempio la R segnata nella fig. 1, taglia la curva a' nel punto A', la t', nel punto T : tirando da A' e T' le parallele all'asse x, si ottengono sulle linee a e t due punti A e T rispettivamente; ai quali corrispondono determinate σ ed ε. Ma l'asse y può servire non soltanto quale asse delle ε ma anche quale asse delle altezze y delle zone compresse e tese della sezione. Essendo, infatti:

$$y = \varepsilon r$$

basta fissare la grandezza di r per ricavare l'altezza y di dette zone. Nell'esempio che sviluppiamo, otteniamo:

Per il punto A	$\sigma_A = 56$ Kg/cmq	$\varepsilon_A = 83{,}75 \cdot 10^{-5}$
Per il punto T'	$\sigma_T = 70{,}5$ Kg/cmq.	$\varepsilon_T = 70{,}51 \cdot 10^{-5}$

e se supponiamo che sia $r = 25000$ cm. l'altezza della zona compressa risulta

$$y_c = \varepsilon_A \, r = 19 \text{ cm.}$$

e quella della zona tesa

$$y_t = \varepsilon_t \, r = 17{,}6 \text{ cm}$$

Si può anche procedere inversamente, fissando per esempio σ_t e quindi y_t, cioè il punto T. Il punto T' si otterrà allora tirando da T la parallela ad x; il punto A' tirando da T' la parallela a y; il punto A tirando da A' la parallela a x.

Per avere poi la grandezza del momento resistente di una sezione per date σ sono state tracciate le linee a'', b'', c'', integrali delle a', b', c' rispettivamente.

Una tangente generica a tali curve integrali taglia l'asse y in un punto che fornisce l'altezza y'_c alla quale è applicata la risultante degli sforzi di compressione.

Poichè per la risultante degli sforzi di trazione tale altezza è sempre $y'_t = \frac{2}{3} y_t$, si può ricavare il braccio di leva delle forze interne, che sarà di $d = y'_c + y_t$.

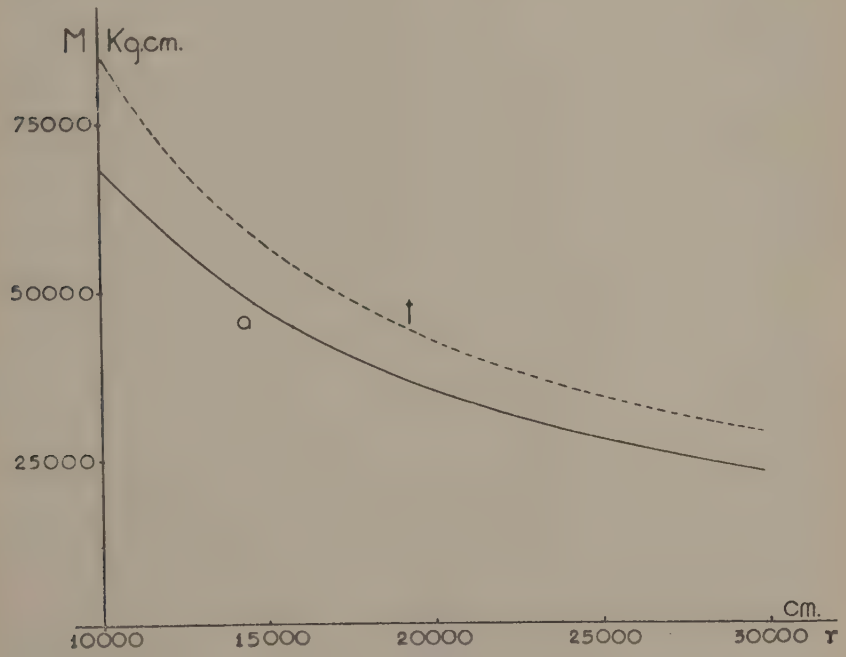


Fig. 4.

E poichè la grandezza delle risultanti di trazione e di compressione può anche ricavarsi dal grafico, o comunque è data, supponendo la larghezza $B = 1$, dalla

$$T = \frac{1}{2} \sigma_t y_t$$

si ricava immediatamente il momento resistente:

$$M_r = T d$$

4. — Allo scopo di poter effettuare rapidamente la risoluzione del problema del progetto e della verifica di una sezione rettangolare, abbiamo poi proceduto al tracciamento delle curve r, M.

Fissata, per ognuno dei tre tipi di curve a, b, c, una sezione fondamentale (la quale in pratica è risultata da un calcolo come quello riportato nel numero precedente, per una σ_t prefissata) abbiamo fatto variare r e quindi σ_t e σ_c e calcolati in corrispondenza i valori di M_r.

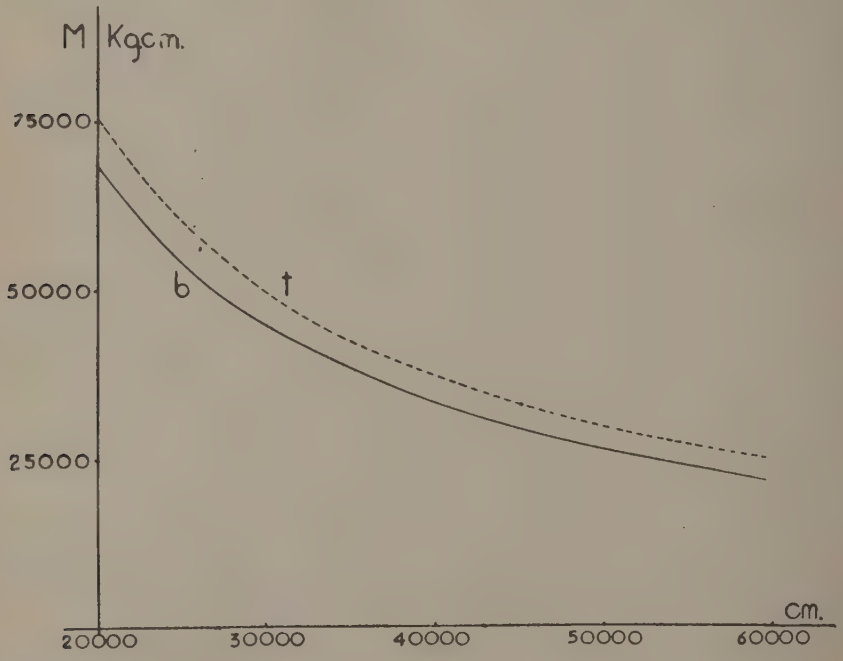


Fig. 5.

Nelle figg. 4, 5 e 6 sono tracciate le tre curve M_r, r per i tre casi che studiamo; la sezione base è, per la fig. 4 (relativa alle linee ε. σ a e t) di cm. $10 \times$ cm. 21,7; per la fig. 5 (relativa alle linee ε. σ b e c) cm. $10 \times$ cm. 20,8; per la fig. 6 (relativa alle linee ε. σ c e t) cm. 10 per cm. 21,2. Con l'ausilio di tali curve si risolvono agevolmente i problemi interessanti la pratica, cioè il calcolo di verifica e quello di progetto, nel seguente modo.

A) — *Calcolo di verifica.*

Per la sezione base la lettura dei diagrammi è immediata; per sezioni che abbiano la stessa altezza della data e larghezza $B_1 = k\,B$ sarà per il

corrispondente momento resistente M_{B_1}, e per il corrispondente raggio di curvatura r_1, rispettivamente

$$M_{B_1} = k_1 M$$

$$r_1 = r$$

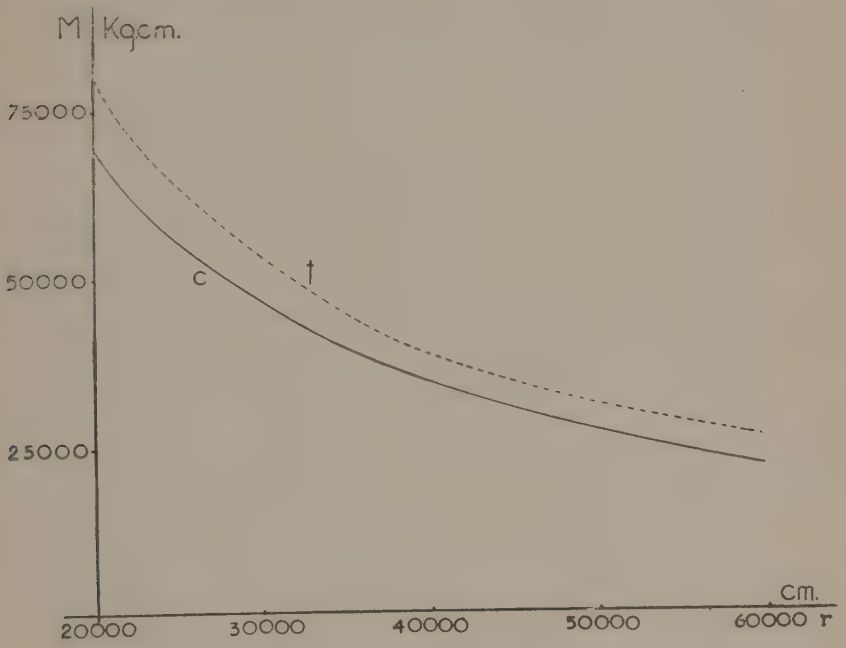


Fig. 6.

Per sezioni che abbiano la stessa larghezza B, ma altezza $h_1 = k_2 h$, si avrà ovviamente:

$$M_{h1} = k^2_2 M \qquad \text{e} \qquad r_1 = k_2 r$$

Per sezioni, infine, che stiano in un determinato rapporto di omotetia k_3 con quella data, sarà

$$M_1 = k^3_3 M \qquad \text{e} \qquad r_1 = k_3 r$$

B) — *Calcolo di progetto.*

Ci si serve di quanto detto per la verifica. Fissate le σ, è noto, per la sezione fondamentale, r e quindi M_r. Se il momento flettente M_f dato è in

un rapporto col momento M_r espresso da $k_4 = \frac{M_f}{M_r}$ si può:

a) o variare la larghezza B, assumendo quella $B_1 = k_4 B$.

b) o variare l'altezza h, assumendo quella $h_1 = \sqrt{k_4}\, h$

c) o variare la sezione omoteticamente, assumendo quella che sta con la data in un rapporto di omotetia dato da $\sqrt[3]{k_4}$, mentre il nuovo raggio di curvatura sarà:

$$r_1 = \sqrt[3]{k_4}\, r$$

Abbiamo poi calcolati i valori dei momenti flettenti che le sezioni fissate sarebbero capace di assorbire in regime di Hooke, con gli stessi valori di tensioni σ che corrispondono ai punti delle curve M_r trovate. I relativi valori li abbiamo riportati nelle stesse figg. 4, 5 e 6, ottenendo le linee a tratti ivi segnate. La differenza percentuale dei valori forniti dalle due linee intere e a tratti varia per le curve a, t dal 20 al 26 %, per le b, t dal 10 al 14 %, per le c, t dal 13 al 18 %, donde appare chiaro come sia necessario, quando il materiale lo richieda, seguire il metodo di calcolo da noi esposto.

Essendo poi noti i valori di M e r, si possono ricavare i valori dei momenti d'inerzia virtuali I^* mediante la:

$$I^* = \frac{M r}{E^*},$$

e gli analoghi:

$$I = \frac{M_H r}{E}$$

essendo M_H i valori corrispondenti al regime di Hooke. Come si vede l'errore percentuale che si commette adottando I invece di I^* è lo stesso di quello relativo ai momenti, quindi sensibilissimo. Risulta dunque la grande importanza pratica che hanno i nuovi concetti per il calcolo delle incognite iperstatiche, riportati nella nostra citata memoria.

5. — Ci è parso opportuno poi completare il paragone tra il momento che la sezione può assorbire, considerando la legge ε, σ, data delle curve segnate, e quello che assorbirebbe in regime di Hooke.

Abbiamo, a tale scopo, tenuto fisso r e l'abbiamo posto eguale a 50.000 cm. per le linee a, t, a 100.000 per le linee b, t, c, t. In relazione ai valori di σ_t variabili di 10 in 10 da 20 a 100 Kg/cmq. abbiamo determinate le altezze delle sezioni e i momenti resistenti da esse offerti. Le stesse sezioni, in regime di Hooke, offrono momenti resistenti diversi, in particolare maggiori.

Nella fig. 7, abbiamo tracciato le curve degli M_r in corrispondenza del regime qualificato dalle linee a, t, e in corrispondenza del regime di Hooke. L'errore che si commette nella valutazione dei momenti si aggira intorno al 10 ÷ 12 %; ed è quindi tutt'altro che trascurabile.

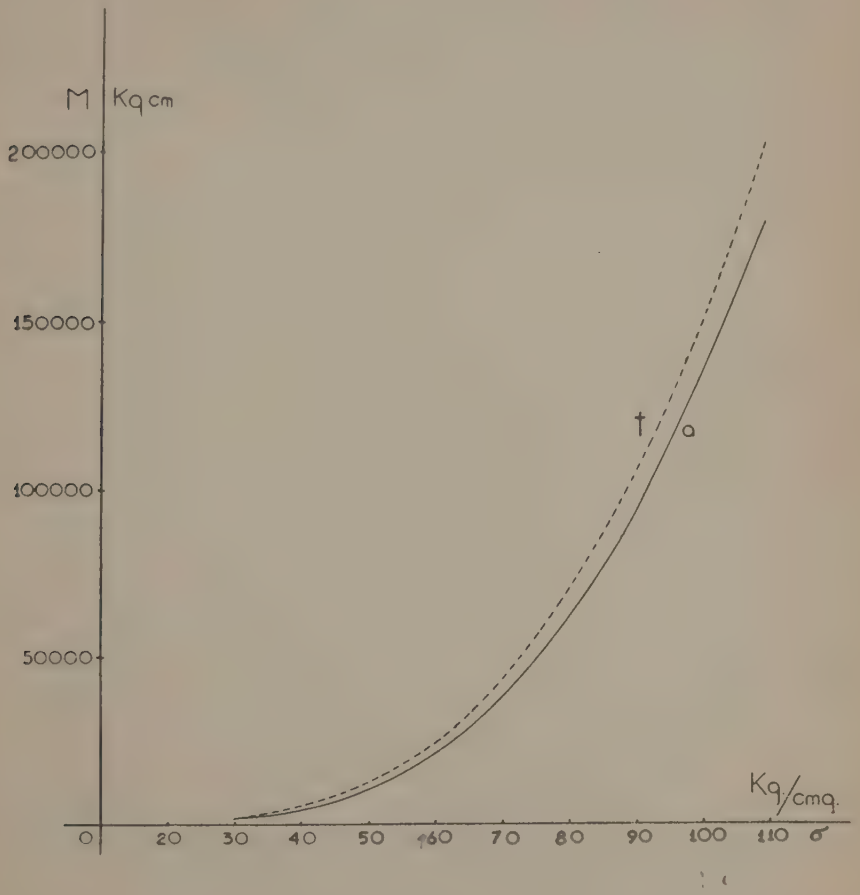


Fig. 7.

Essendo, poi, anche qui, noti M ed r per ogni sezione, abbiamo ricavato il momento d'inerzia virtuale I^* mediante la:

$$I^* = \frac{M r}{E}$$

essendo E il valore considerato in regime di Hooke. Calcolato pure il mo-

mento d'inerzia della sezione coi metodi abituali

$$I = \frac{1}{12} b h^3$$

si è constatato che l'errore percentuale si aggira ancora intorno al 16-18 %.

Operazioni perfettamente analoghe sono state effettuate sulle linee *b*, *t* e *c*, *t* e i relativi risultati sono riportati nelle figg. 8 e 9.

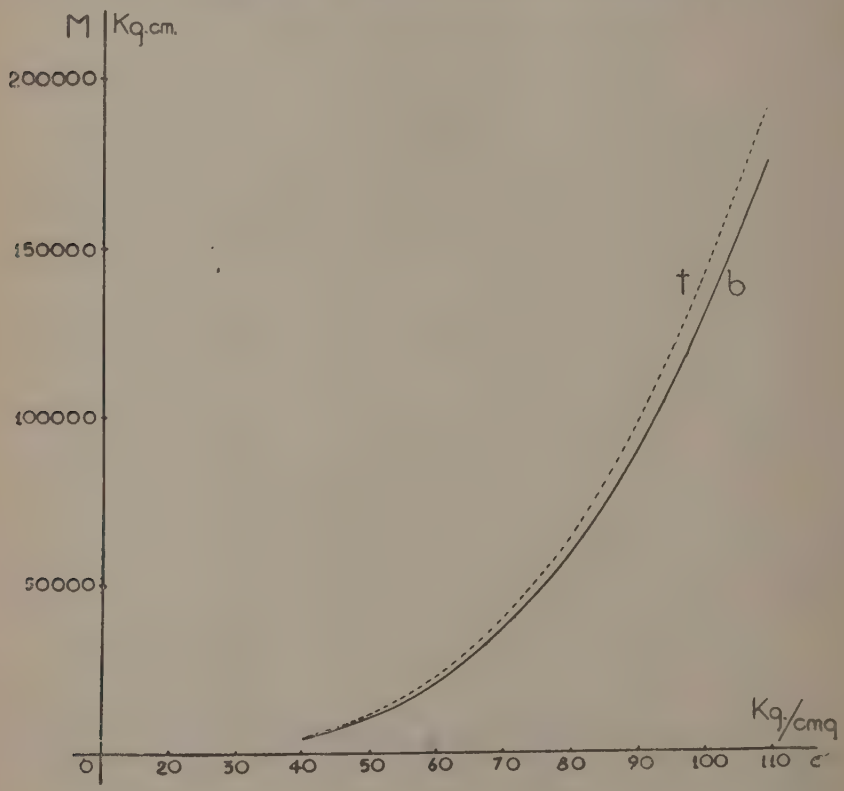


Fig. 8.

Si noti poi che se, tenendo fissa la σ, si fa variare r, variano nel modo detto h e M, ma gli scarti percentuali sopra indicati rimangono inalterati. Come poi già facemmo rilevare a suo tempo, non è possibile, in generale, in questi problemi, raggiungere la condizione di equiresistenza.

6. — Se il materiale di cui è costituito il solido prismatico in esame è il calcestruzzo cementizio e se esiste anche, nella sezione, un'armatura

metallica, il problema si presenta un po' diversamente. In tal caso la linea l ha significato, com'è notissimo, soltanto in corrispondenza della zona nella quale sono collocate le armature. La linea integrale l' perde anche essa il suo significato e viene praticamente sostituita dal prodotto dell'area complessiva ω dei tondini tesi per la corrispondente tensione σ_f.

Si procederà quindi nel seguente modo:

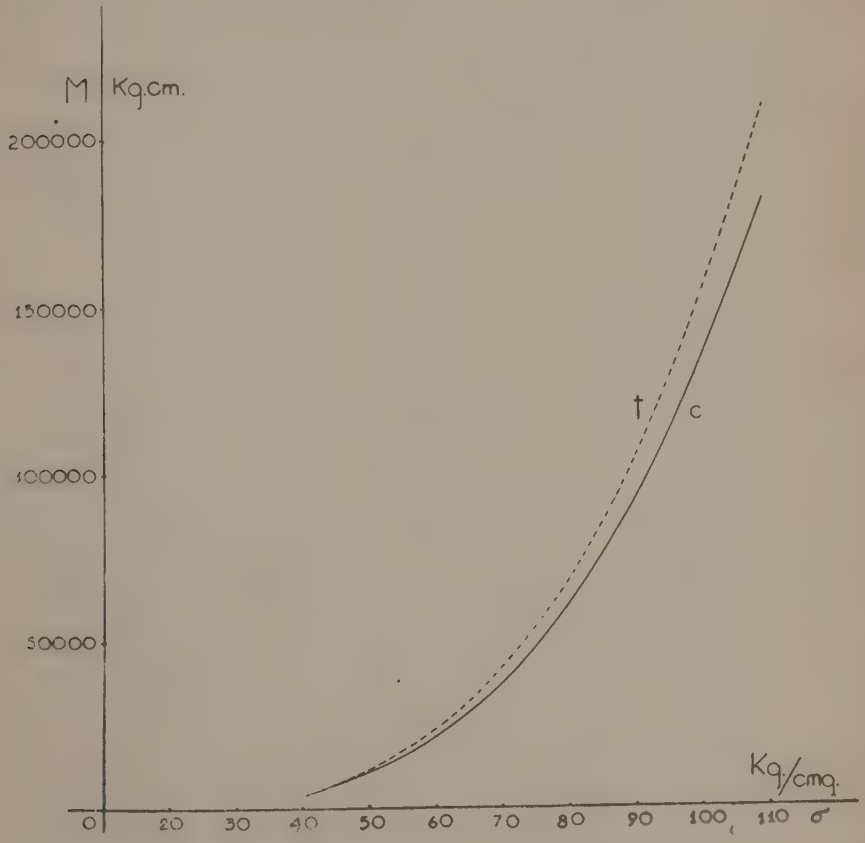


Fig. 9.

Fissato un σ_{max} per il calcestruzzo e un determinato r si ha l'altezza y_c della zona compressa, la grandezza R_c della risultante di compressione, la posizione del punto C in cui essa è applicata e la relativa distanza y'_c dall'asse neutro.

Rimane per conseguenza fissata la grandezza dalla risultante di trazione

$$R_t = R_c = \sigma_f \omega$$

Dato poi il momento flettente esterno, si ricava subito il braccio della coppia interna:

$$d = \frac{M_f}{R_t}$$

Poi è

$$\varepsilon_f = \varepsilon_c \frac{h' - y_c}{y_c}$$

ed essendo ovviamente

$$h' = d - y'_c + y_c$$

si ha:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_c \frac{d - y'_c}{y_c}$$

Per conseguenza la σ_f, per la quale è

$$\sigma_f = E_t \varepsilon_t$$

rimane fissata. Può quindi ora calcolarsi ω.

Anche in tal caso non si raggiunge dunque, in generale, la condizione di equiresistenza.

7. — Vogliamo ora far notare come i metodi di calcolo sopra esposti siano applicabili anche in casi diversi da quelli finora studiati, particolarmente quando si producano deformazioni plastiche.

Vero è che, da quanto abbiamo detto sopra ed anche nella precedente nostra nota, risulta chiaro che l'indiscutibile campo di applicazione dei concetti che abbiamo esposti è quello proprio delle deformazioni elastiche. Noi abbiamo supposto che venga meno la proporzionalità tra sforzo e deformazione, non l'elasticità del materiale.

Supponiamo, ora, invece, che si producano deformazioni plastiche: il problema diviene certamente più complesso. Può, infatti, intervenire il modo secondo cui tali deformazioni si sono prodotte, il tempo di produzione di esse e così via. Noi siamo, però, costretti, se vogliamo pervenire a qualche risultato pratico, a schematizzare il problema; ma evidentemente dobbiamo cercare, nella schematizzazione, di non allontanarci troppo dal fenomeno reale e di coglierne, almeno in parte, le caratteristiche essenziali.

Ora i fenomeni di plasticità sono principalmente caratterizzati dall'essere irreversibili; in altri termini, verificatasi la deformazione plastica, essa permane al diminuire o cessare dei carichi che l'hanno prodotta, inducendo quindi delle tensioni interne analoghe a quelle causate da una distorsione.

Se però noi supponiamo che non si verifichi il discarico della strut-

tura, che i carichi siano sempre gli stessi ovvero vadano aumentando, verremo a considerare soltanto la fase ascendente del fenomeno.

In tale fase, l'effetto della plasticità non è più analogo a quello di una distorsione. Per effetto dei carichi, producendosi tensioni interne che sorpassano il limite di elasticità, la relazione tra ε e σ e il relativo diagramma rappresentativo non saranno più quelli lineari abituali, ma avranno espressione o forma più generali, così come abbiamo supposto più su. Ci troveremo quindi in un caso perfettamente analogo a quelli ora studiati. Che una parte almeno delle deformazioni che si producono sia di natura plastica e non elastica non ha alcuna conseguenza sul regime statico della struttura, finchè questa è sotto l'azione degli stessi carichi che hanno prodotto dette deformazioni.

Ora tale situazione si verifica in pratica tutt'altro che raramente. Numerosissime, specie nel campo dell'edilizia, sono le strutture nelle quali l'importanza dei carichi fissi rispetto ai totali è assolutamente preponderante. Per di più alcuni ammettono che le deformazioni plastiche si verifichino solo per effetto dei carichi fissi, dato che i carichi accidentali o mobili spesso non agiscono per un tempo sufficiente a produrre deformazioni plastiche. Ed infine, anche quando si produca il discarico della struttura, precedentemente, nella fase di carico, il fenomeno avrà assunte caratteristiche analoghe a quelle da noi prese in esame e andrà quindi studiato da tal punto di vista.

Appare dunque chiaro come, in determinate circostanze, i concetti da noi esposti abbiano un altro vasto campo di utilizzazione, campo che, con le attuali tendenze costruttive, si presenta di particolare interesse.

Calcolo del profilo longitudinale di una trave incastrata agli estremi di uguale resistenza rispetto ai momenti massimi dovuti ad un carico mobile.

Nota del dott. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 6 dicembre 1941 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Osservazioni sul calcolo statico delle piastre sottoposte a carichi proporzionali agli abbassamenti.

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Sunto. — Si ricercano le espressioni degli spostamenti che soddisfano l'equazione $\Delta_4 w = -Kw$, esprimente che, per una piastra, il carico è, punto per punto, proporzionale all'abbassamento e si mostra come la condizione richiesta possa esser soddisfatta per approssimazione, cioè in un numero finito di punti. Mediante l'uso di costanti si soddisfano poi, in altrettanti punti, le condizioni al contorno. Si considera poi il caso in cui k sia variabile, specie quando la piastra sia vincolata su due lati e solidale, negli altri due, a strutture secondarie.

1. — Il metodo di calcolo statico di travi sollecitate da carichi proporzionali agli abbassamenti che in corrispondenza delle diverse sezioni trasversali della trave si verificano è stato da tempo escogitato, ed è spesso applicato, nonostante che esso offra non lievi difficoltà pratiche, per la complessità numerica dei computi da svolgere.

L'analogo problema della piastra rettangolare sollecitata da carichi sempre proporzionali agli abbassamenti si presenta invece particolarmente arduo, sia nella sua teorica risoluzione, sia nei suoi computi numerici.

In un caso particolare e ammettendo alcune approssimazioni, è stato già da noi studiato in una precedente nota [1]). Vogliamo ora fornire una soluzione più generale, per quanto sempre fondata su criteri di approssimazione.

2. — L'equazione da soddisfare per la risoluzione del problema è:

$$\Delta_4 w = -kw \tag{1}$$

su tutta l'estensione della piastra; sui bordi bisognerà poi soddisfare particolari condizioni, dipendenti dal vincolamento della piastra stessa.

È possibile trovare espressioni dello spostamento w che soddisfino la (1).

Posta l'origine 0 in un vertice della piastra e gli assi x e y secondo

---

[1]) F. Jossa, *Calcolo di travi munite di appoggi elastici di notevole estensione.* Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fis e Mat. di Napoli. 1939-40.

due lati di essa, di lunghezza a e b rispettivamente, e fatto $x = a - x$ e $y' = b - y$, possiamo porre:

$$w_{rs} = c_r [f_1(x) f_2(y) + f_2(x) f_1(y)] \qquad (2)$$

essendo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (e^{rx} - e^{-rx}) \operatorname{sen}(rx') + (e^{rx'} - e^{-rx'}) \operatorname{sen}(rx) \\ f_2(x) &= (e^{rx} + e^{-rx}) \cos(rx') + (e^{rx'} + e^{-rx'}) \cos(rx) \\ f_1(y) &= (e^{ry} - e^{-ry}) \operatorname{sen}(ry') + (e^{ry'} + e^{-ry'}) \operatorname{sen}(ry) \\ f_2(y) &= (e^{ry} + e^{-ry}) \cos(ry') + (e^{ry'} + e^{-ry'}) \cos(ry) \end{aligned}$$

Tale espressione del w, simmetrica in x e x' e in y e y', soddisfa la (1). Si ha infatti per essa:

$$\Delta_4 w_{rs} = -16 r^4 w_{rs}$$

onde, noto k, si può fissare r.

Occorre però, come si è detto, soddisfare le condizioni ai limiti. Tali condizioni sono molto più complesse che non per la trave. Difatti in questa l'abbassamento, l'inclinazione, il momento flettente e lo sforzo di taglio hanno un sol valore, per ognuna di tali grandezze, in ogni estremo della trave. Nella piastra invece i quattro parametri ora detti variano in generale da punto a punto del contorno, od almeno, con un'approssimazione abituale nel calcolo delle piastre, da tratto a tratto di ogni bordo.

Per risolvere tale problema si può pensare di introdurre tante costanti arbitrarie, da determinarsi poi in modo che siano soddisfatte le condizioni al contorno in altrettanti punti. A tale scopo si può assumere, quale espressione del w_r, invece della (2), la

$$W = \sum_{s=1}^{n} w_{rs} \qquad (3)$$

nella quale la sommatoria è rispetto ad s. L'espressione (3) non soddisfa però la (1), se si assumono gli r ad arbitrio. Si avrà infatti:

$$\Delta_4 W = -16 [r_1^4 w_{r1} - r_2^4 w_{r2} - r_3^4 w_{r3} - \dots .]$$

mentre dev'essere d'altra parte:

$$\Delta_4 W = -K W$$

onde risulta:

$$K = \frac{16 \Sigma r_s^4 w_{rs}}{\Sigma w_s}. \qquad (4)$$

Ma tale relazione è inammissibile se, come finora abbiamo supposto e come in effetti è, w è funzione di x e y, mentre viceversa riteniamo k costante rispetto a x e y. Perchè dunque essa abbia valore, si potrà scinderla in tante relazioni per quanti punti si vuole che essa sia soddisfatta, calcolare in detti punti le espressioni dei w_{rs} in funzione di x e y, e determinare poi le r con la condizione che sia soddisfatta in detti punti la (4) e quindi la (1). In altri termini, la (4) si scinde in tante espressioni, ognuna relativa a un punto di coordinate x e y, nelle quali quindi sono incognite le r. Evidentemente tali r dovranno essere tante quanti sono i punti nei quali si vuole che sia soddisfatta la (1). La soluzione risulta quindi approssimata e tanto meglio quanto maggiore è s.

Ma nelle espressioni dei w_{rs} compaiono anche le costanti c_s che sono tuttora indeterminate e che vanno fissate con le condizioni ai limiti. Occorrerà quindi scrivere un secondo gruppo di s equazioni, tante quante sono le c_s, che esprimono tali condizioni. Per es. potrà occorrere che sia:

$$\begin{array}{lllll} & \text{per } x=0 & \text{e } y=0 & & w=0 \\ & \text{» } x=a & & y=b & w=0 \\ \text{e poi} & \text{per } x=0 & \text{e } x=a & & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\eta\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ & \text{e per } y=0 & \text{e } y=b & & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{array}$$

ipotesi che corrispondono al caso della piastra appoggiata sul contorno.

Tali condizioni possono poi pensarsi nella forma più generale, senza che venga alterato o ulteriormente complicato, almeno in linea teorica, il procedimento. Se difatti la piastra è solidale ad altre strutture lungo i bordi, si esprimeranno inclinazioni e abbassamenti in essa, e si eguaglieranno agli analoghi parametri delle strutture disposte intorno alle piastre. Caso per caso sarà facile individuare la condizione da imporre. Praticamente tali condizioni potranno causare maggiore complessità numerica se le espressioni dei detti parametri nelle strutture contornanti la piastra sono a lor volta legate a parametri di ulteriori strutture (per es. caso della continuità e simili).

Va ancora notato che la soluzione indicata non richiede la costanza di K, onde in modo perfettamente analogo a quello ora esposto si può risolvere il caso in cui la piastra reagisca ad eguali abbassamenti diversamente da punto a punto: basta nella (4) porre per K il valore relativo ad ogni punto. Tale caso si verifica in pratica quando la piastra non è poggiata sul suolo elastico ma sostiene invece una struttura secondaria, solidale con essa, che le trasmette i carichi che sopporta: il procedimento serve allora a determinare la distribuzione delle reazioni di appoggio con

le quali la piastra reagisce rispetto alle strutture secondarie. Ma in tal caso, per l'esistenza stessa della struttura secondaria, la piastra è in generale vincolata su due lati soltanto mediante appoggi o incastri, perfetti o non, a strutture verticali (pilastri, muri, ecc.) mentre negli altri due lati essa è vincolata alla struttura secondaria. Specificando più particolarmente, si possono dare una o più travi che scarichino sulla detta piastra, magari correndo continue attraverso esse.

In tali casi le espressioni della (2) o della (3) si modificano in conseguenza. Supponendo che sui lati $y = 0$ e $y = b$ la piastra sia poggiata, e ponendo l'origine in mezzeria del lato $y = 0$, si può assumere per w_r la espressione:

$$w_r = f_3(y)\, e^{\beta x} \cos(\beta x) + f_4(y)\, e^{\beta x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

dove

$$f_{(3)}\, y = (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \operatorname{sen}(\alpha y') + (e^{\alpha y'} + e^{-\alpha y'}) \operatorname{sen} \alpha y$$
$$f_{(4)}\, y = (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \cos(\alpha y') + (e^{\alpha y'} - e^{-\alpha y'}) \cos \alpha y$$

e $$2\beta^2 = \alpha^2$$

espressione già da noi trovata nella nota sopra citata. Si può poi procedere in modo perfettamente analogo a quello ora esposto.

Il metodo di cui sopra presenta complessità di calcolo indiscutibili, nonostante che esso conduca a soddisfare la (1) soltanto in determinati punti e quindi per approssimazione.

È perciò che si può pensare a semplificare il problema, rinunziando ad una maggiore esattezza della soluzione, specie quando k sia costante. Si può in tal caso, come altra volta da noi proposto, assumere un'espressione del W che soddisfi la (1) e sovrapporre ad essa una $\Sigma c_s w_s$ in cui ogni w_s è tale che per esso si ha:

$$\Delta_1\, w_s = 0$$

cioè che corrisponde a carico nullo. Le costanti c_s servono e bastano per determinare le condizioni ai limiti. Evidentemente in tal modo la reazione della piastra non è più, punto per punto, proporzionale allo spostamento totale del punto, ma ad una sua quota parte che però risulta, come può numericamente verificarsi ed è stato da noi verificato, poco diverso da detto spostamento totale.

Comunque, quanto abbiamo sopra esposto vale a dare una soluzione più generale del problema propostoci.

CALCOLO DELLA FREQUENZA PIÙ BASSA DI UNA MEMBRANA VIBRANTE CON CONTORNO FISSO AVENTE LA FORMA DI ELLISSE.

Nota della dott. **Maria Laura Ettorre,** *presentata dal socio ord.* **M. Picone**

(Adunanza del dì 4 aprile 1942 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

L'AZIONE STATICA ESERCITATA SU UNA STRADA DA RUOTE A CERCHIONE RIGIDO.

Nota del dott. **Camillo Zocchi,** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

STUDIO STATICO DI UN CILINDRO ELASTICO SOLLECITATO IN CONDIZIONI PIÙ GENERALI DI QUELLE DI DE SAINT VENANT.

Nota del dott. **Franco Mazzarella,** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

DETERMINAZIONE DELLE TENSIONI IN UNA LASTRA RETTANGOLARE INCASTRATA LUNGO DUE LATI OPPOSTI SOGGETTA A FORZE DI MASSA.

Nota del dott. **Franco Mazzarella,** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Determinazione delle tensioni in una volta sottile rigata a piano direttore ed avente per altre direttrici due semiellissi affini.

Nota del dott. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Contributo allo studio delle strutture iperstatiche di uniforme resistenza.

Nota del socio ordinario **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX)

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo.

Memoria del dott. **Ulderico Bencivenga**

(presentata nell' adunanza del dì 3 gennaio 1942 - XX
per essere inserita nel vol. II, serie 3ª, degli Atti)

Sunto. — L' A., in analogia alla rappresentazione reale dei numeri complessi nel piano di Gauss, studia una tale rappresentazione per gli elementi delle altre due algebre, reali, doppie, dotate di modulo, cioè per i numeri bireali e duali, con particolare riguardo alle funzioni totalmente derivabili secondo Spampinato.

Relazione sul concorso al premio triennale Agostino Oglialoro Todaro.

Pel concorso al premio triennale Agostino Oglialoro Todaro bandito il 10 gennaio 1940 XVIII e scaduto il 31 gennaio 1941-XIX si sono presentati due concorrenti:

La signorina Alba Martire, laureatasi il 19 novembre del 1939 con voti centodieci su centodieci, ha una carriera scolastica con una media di 28,7 con una lode, avendo sostenuto 21 esami. La medesima è stata abilitata alla professione di chimico con centotrenta su centocinquanta nella sessione del 1939.

Il secondo concorrente è il signor Giannone Antonio di Carlo, già laureato in ingegneria nel 1936 e laureatosi in chimica l'8 dicembre 1940 con voti centodieci su centodieci e lode, con una carriera scolastica con una media di 26,5 con cinque lodi, avendo sostenuto 26 esami. Presenta inoltre n. 7 pubblicazioni riguardanti differenti materiali da costruzioni, eseguite nel periodo 1938-40 nella nostra Università.

La Commissione, vagliati i titoli dei due concorrenti, propone di concedere il premio di L. 1000 (mille) al Dr. Antonio Giannone.

Napoli, 7 marzo 1942-XX.

La Commissione
F. Giordani
G. Malquori
M. Bakunin, *rel.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 8 novembre 1941-XX.

Presiede il presidente sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carrelli, Colamonico, Diamare, Giordani, Longo, Malquori, Picone, Pierantoni, Ricci ed i soci corrispondenti nazionali De Dominicis, Imbò, Milone, Nobile, Pascal, Salfi e Spampinato.

Il presidente comunica che, con lettera del 25 luglio scorso, il Ministro dell'Educazione Nazionale ha approvato la nomina dei proff. Mammana Gabriele, Mattioli Gian Domenico, Panetti Modesto e Spampinato Nicolò a soci corrispondenti nazionali nella sezione delle scienze matematiche e dei proff. Imbò Giuseppe, Milone Ferdinando e Salfi Mario a soci corrispondenti nazionali nella sezione di scienze naturali, e dà il benvenuto ai soci presenti.

Indi ricorda la scomparsa del consocio Filippo Bottazzi, avvenuta il 19 dello scorso settembre, e legge la lettera del prof. Gaetano Quagliariello, che chiede di poter commemorare il socio defunto. L'Accademia approva.

Il segretario presenta l'Annuario 1941-42 della Società Reale di Napoli, testè pubblicato, comunica la circolare ministeriale relativa ai sunti delle pubblicazioni in lingua latina, e dà notizia del calendario delle tornate accademiche ordinarie per l'anno XX E. F., fissato dal presidente nei giorni 8 novembre, 6 dicembre, 3 gennaio, 7 febbraio, 7 marzo, 4 aprile, 2 maggio e 13 giugno.

Il socio Picone legge la commemorazione di Ernesto Pascal. L'Accademia applaude l'oratore ed il presidente lo ringrazia, proponendo che la commemorazione venga inserita nel Rendiconto insieme con la fotografia del consocio defunto. L'Accademia approva.

Il presidente presenta due note del dottor Giuseppe Mirigliano: « *Intorno all'età dei fossili rinvenuti nei materiali vulcanici del golfo di Napoli* », e « *Osservazioni geologiche nella bassa valle del Sabato* », proponendo che vengano accolte per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il presidente presenta, tanto a nome proprio che del socio D'Erasmo, una nota del prof. Antonio Scherillo su « *Le lave attuali del Vesuvio*: I) *Lave dell'autunno 1940* », e ne parla, concludendo con la proposta di inserzione nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il presidente presenta, a nome suo e del socio Colamonico, una memoria del prof. Francesco Castaldi, dal titolo: « *L'abitazione a corte in Sardegna (Campidano) e l'origine mediterranea della corte* », corredata da una tavola e da 10 figure intercalate, proponendone lo accoglimento per la stampa nel volume in corso degli Atti. L'Accademia approva, fis-

sando un proprio contributo non superiore alle L. 500 per la esecuzione delle illustrazioni.

Il socio Picone presenta, per il Rendiconto, una nota del socio corrispondente straniero Azevedo do Amaral « *Sobre a integração des equações diferenciais ordinarias lineares e ses equações integrais.* ». Poichè la nota è redatta in portoghese, l'Accademia discute se accoglierla nella lingua originale, ovvero tradurla in italiano. Il prof. Pierantoni propone di accoglierla nella lingua originale, e l'Accademia approva.

Il socio Ricci presenta per la stampa nel Rendiconto due sue note: « *Calcolo rigoroso delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio* » e « *Metodo semplificativo e speditivo per il calcolo statico di verifica e di progetto per un arco reticolare a spinta eliminata* », e ne parla. Lo stesso socio presenta, con la proposta di accoglimento nel Rendiconto, cinque note: quattro dell'ing. Franco Mazzarella dai titoli: « *Determinazione della pressione esercitata da un suolo elastico su di una trave appoggiata ad esso* », « *Applicazione del metodo Cross al calcolo dei telai a nodi spostabili* », « *Considerazioni sulla distribuzione delle tensioni tangenziali negli archi piani a grande curvatura* », e « *Determinazioni del « risultante di due equazioni » per la ricerca delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio* », ed una del dottor Giuseppe Sambito su « *Esempi di coazioni termiche negli archi piani a grande curvatura* ». Egli informa che le eventuali spese di stampa per le pagine sorpassanti i limiti fissati saranno a carico degli autori. L'Accademia approva.

Il socio Longo offre in omaggio all'Accademia il nuovo volume del Bollettino dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli e la Relazione per l'anno 1940 sulla Stazione sperimentale per le piante officinali, e ne illustra le parti più importanti. Il presidente, a nome dei soci, ringrazia il donatore.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 dicembre 1941 - XX.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Longo, Malquori, Picone, Pierantoni, Ricci ed i soci corrispondenti nazionali De Dominicis, Mattioli, Nobile, Salfi e Zirpolo.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 8 novembre, che è approvato, e presenta il volume del Rendiconto dell'anno 1940-41 XIX, testè pubblicato. Indi legge la « *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia* » nello scorso anno, che verrà stampata nel nuovo volume del Rendiconto.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato

un gruppo di lavori dell'Istituto per le applicazioni del calcolo, offerto dal consocio Picone.

Il presidente dà la parola al prof. Gaetano Quagliariello, il quale legge la *Commemorazione del socio Filippo Bottazzi*, vivamente applaudita dai presenti. Ringraziando l'oratore, il presidente informa che tale commemorazione sarà integralmente inserita nel Rendiconto, insieme con il ritratto del socio scomparso.

Il socio Ricci presenta, per il Rendiconto, una nota dell'ing. Franco Mazzarella dal titolo: « *Calcolo del profilo longitudinale di una trave incastrata agli estremi di uguale resistenza rispetto ai momenti massimi dovuti ad un carico mobile* », proponendone l'accoglimento per la stampa. L'Accademia approva.

Uguale proposta d'inserzione nel Rendiconto accademico fa il socio Caccioppoli, presentando una nota del prof. Antonio Colucci: « *Sul prolungamento analitico* ». L'Accademia approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 gennaio 1942 - XX.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Colamonico, Giordani, Longo, Malquori, Ricci e D'Erasmo (segretario), ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Imbò e Spampinato.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 6 dicembre, che è approvato. Indi il presidente richiama l'attenzione dei soci sulla ricorrenza del decimo anniversario della scomparsa dell'indimenticabile socio prof. Ferruccio Zambonini, ricordandone, come amico e come collega, le elette qualità di uomo, di cittadino, di maestro e di scienziato, che con la sua multiforme attività e con le sue opere ha lasciato un nome indelebile nella storia dell'insegnamento e della scienza italiana. Lo stesso sen. De Lorenzo, quale geologo, ne ricorda sopratutto i lavori in campo mineralogico e geologico, coronati dalla monumentale sua « *Mineralogia vesuviana* » pubblicata in uno splendido volume negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Napoli. Il socio eccellenza Giordani, quale successore dello Zambonini nella cattedra di Chimica generale della R. Università di Napoli, illustra ampiamente tutta l'opera chimica dello Zambonini e la sua scuola operosa, dalla quale sono usciti molti discepoli che ora insegnano nelle Università d'Italia. Il presidente ringrazia l'eccellenza Giordani.

Il socio corrispondente Andreoli presenta una nota del prof. Giuseppe Palomba dal titolo: « *Elementi matematici per l'economia corporativa* », proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Lo stesso socio Andreoli presenta per il Rendiconto una sua nota su « *Equazioni algebriche nei corpi numerici* », e ne discorre.

Il socio corrispondente Spampinato presenta una memoria del dott. Ulderico Bencivenga « *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo* », proponendone la stampa nel volume in corso degli Atti. L'Accademia approva, lasciando a carico dell'autore l'esecuzione delle figure intercalate nel testo.

Uguale proposta d'inserzione negli Atti accademici fa il medesimo socio Spampinato, presentando la memoria della dott. Anna Rocco Boselli su « *La serie di potenze nelle sedici algebre complesse del quarto ordine dotate di modulo* ». L'Accademia approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 febbraio 1942 - XX.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Ricci ed i soci corrispondenti nazionali De Dominicis e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 gennaio, che è approvato. Il socio Diamare si associa alle parole commemorative che sui compianti consoci Filippo Bottazzi e Ferruccio Zambonini vennero pronunziate nelle due adunanze precedenti, alle quali egli non potè intervenire.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Checchia-Rispoli che ne propone l'inserzione nel Rendiconto, una nota dell'ing. Roberto Signorini dal titolo: « *Cenni sulla formazione gessoso-solfifera del bacino del Neto in Calabria* ». L'Accademia approva.

Il socio Giordani presenta una nota dell'ing. M. Jacopetti dal titolo: « *L'attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini* » e ne parla, proponendone la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il socio Carrelli fa analoga proposta nel presentare una nota del prof. Giovanni Platania: « *Su gli aloni: risultati di osservazioni eseguite in Napoli dal 1922 al 1939* ». È approvata.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 marzo 1942 - XX.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Giordani, Longo, Pierantoni, Ricci e i soci corrispondenti nazionali Andreoli, De Dominicis, Imbò, Salfi, Spampinato.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 febbraio, che è approvato.

Il presidente è lieto di comunicare all'Accademia che il suo antico

assistente e collaboratore, dott. Hidezo Simotomai Tanakadate, divenuto poi professore nell'Università imperiale di Sendai, in Giappone, e socio straniero della Reale Accademia dal 3 dicembre 1927, è stato ora dal governo nipponico nominato presidente del Museo di Storia Naturale Raffles e dell'Orto Botanico di Singapore, o Scionanko, come ora lo chiamano i giapponesi.

Il segretario comunica la Ministeriale 21 febbraio, n. 2083, con la quale la Società Reale di Napoli viene autorizzata ad espletare i concorsi a premio banditi per l'anno 1940-XIX. Per l'Accademia di Scienze Fisiche e matematiche tale autorizzazione riguarda più precisamente: 1°) il concorso al premio biennale accademico, con scadenza 31 dicembre 1940-XIX; 2°) il concorso al premio triennale Agostino Oglialoro Todaro, con scadenza al 31 gennaio 1941-XIX. Al primo di detti concorsi non ha partecipato alcun concorrente; al secondo di essi — destinato a premiare i giovani cultori di chimica pura laureati nella R. Università di Napoli durante il triennio gennaio 1938 a dicembre 1940 — presero parte due concorrenti, e cioè la dott. Alba Martire ed il dott. Antonio Giannone.

Per questo secondo concorso la Commissione, nominata dal presidente in persona dei soci Bakunin, Giordani e Malquori, legge la relazione, la quale conclude con la proposta che il premio, dello ammontare netto di L. 1000, venga assegnato al dott. Antonio Giannone. L'Accademia unanime approva tale proposta.

Il socio corrispondente Andreoli presenta una nota del prof. Guido Barba dal titolo: « *Questioni di concergenza e teorema di Hadamard per le serie di Dirichlet e le serie di potenze generalizzate gruppali* », ed un'altra del prof. Giuseppe Giuga sopra « *Alcune estensioni del determinante di Vandermonde* », proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto, con le limitazioni in vigore. L'Accademia approva.

Il socio Ricci presenta, con uguale proposta d'inserzione nel Rendiconto accademico, tre note: una dell'ing. Adriano Galli: « *Instabilità nell'equilibrio d'una volta-trave* », un'altra del dott. Mario Turra: « *L'estensimetro a base fissa nella determinazione di allungamenti unitari non uniformi* », ed una terza del dott. Guido Guerra: « *Calcolo statico dei telai elastici spaziali* ». L'Accademia approva.

Il socio Longo presenta in omaggio la recente pubblicazione di Ciferri e Grilli su « *Il piretro insetticida* », con prefazione dello stesso consocio Longo, e ne parla. Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1 aprile 1942 - XX.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Gior-

DANI, LONGO, MALQUORI, PIERANTONI, ed i soci corrispondenti nazionali IPPOLITO, NOBILE, SALFI, SPAMPINATO.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 marzo, che è approvato. Indi presenta le memorie VALLESE Giulio: « *Sull'analisi dei fenomeni di regime variabile nei sistemi lineari a costanti concentrate* »; CASTALDI Francesco: « *L'abitazione a corte in Sardegna e l'origine mediterranea della corte* »; MIRIGLIANO Giuseppe: « *Avanzi di vertebrati quaternari di Melpignano (Lecce)* », di cui è stata recentemente ultimata la stampa nel volume in corso degli Atti, e comunica la circolare 17 marzo del presidente della Società Reale, che invita i soci ad inviare, per il tramite della R. Accademia d'Italia, le loro pubblicazioni alle biblioteche della Dalmazia.

Il socio GIORDANI presenta una nota del prof. Ugo BERETTA: « *Studi energetici sui fenomeni di elettrolisi* » e ne parla, proponendo che venga accolta per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il segretario presenta, a nome del socio PICONE, che ne propone l'inserzione nel Rendiconto accademico, una nota della dott. ETTORRE Maria Laura sopra il « *Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse* ».

L'Accademia approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 maggio 1942 - XX.

Sono presenti il presidente sen. DE LORENZO, i soci ordinari BAKUNIN, CACCIOPPOLI, CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, GIORDANI, LONGO, MALQUORI, PIERANTONI ed i soci corrispondenti nazionali DE DOMINICIS, IMBÒ e SALFI.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 aprile, che è approvato.

Il presidente è sicuro di interpretare il sentimento dei soci esprimendo i rallegramenti dell'Accademia al collega DIAMARE per il premio della R. Accademia d'Italia recentemente conferitogli, ed ai soci MARCOLONGO e PANETTI per la nomina ad accademici d'Italia. Il socio DIAMARE, presente, ringrazia.

Il consocio eccellenza GIORDANI si associa alle parole del presidente, rilevando il particolare significato che ha avuto la concessione di tale premio quale rivendicazione di priorità in importanti ricerche scientifiche.

Lo stesso socio GIORDANI presenta una nota del prof. Ugo BERETTA, su « *La decomposizione della Nitrammide* », che fa seguito ad altre indagini sul medesimo argomento già pubblicate nel Rendiconto accademico, ed una nota del prof. Mario M. JACOPETTI dal titolo: « *Rendimento di energia degli elettrolizzatori a diaframma filtrante per cloruro sodico* ». Entrambe vengono accolte per l'inserzione nel Rendiconto.

Il socio Carnera presenta ed illustra una nota del prof. Tito Nicolini sopra « *Il periodo medio dell'attività solare secondo le osservazioni antiche e moderne* », proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

È ugualmente approvata all'unanimità la stampa, nel medesimo periodico, di due note del prof. Franco Jossa, presentate dal segretario a nome del consocio Ricci: una riguardante « *Esperienze sulle proprietà meccaniche di ferri normali e ferri meccanicamente incruditi sottoposti preliminarmente a moderate ripetute sollecitazioni dinamiche* », e l'altra sopra un « *Metodo di influenza e di successiva introduzione di incognite per il calcolo dei telai multipli mediante le rotazioni ai nodi* ».

Processo verbale dell'adunanza del dì 13 giugno 1942 - XX.

Assistono il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Malquori, Pierantoni, Ricci, ed i soci corrispondenti nazionali Mammana, Pascal, Salfi, Spampinato.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 2 maggio, che è approvato, e comunica i ringraziamenti dei soci eccellenze Marcolongo e Panetti per le congratulazioni espresse in occasione della loro nomina ad Accademici d'Italia. Indi segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, il volume: « *Meccanica applicata alle costruzioni* » offerto dal socio Ricci, i tre volumi « *Paesi e popoli della terra* » ed altri opuscoli offerti dal socio Colamonico. Il presidente ringrazia i donatori.

Il presidente comunica i ringraziamenti dell'Altezza Reale il Principe di Piemonte, a cui egli, insieme con il Presidente Generale e col presidente Bruschettini, ha recentemente recato il decreto di nomina a socio della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti.

Il socio Giordani presenta una seconda nota del prof. Ugo Beretta dal titolo: « *Studi energetici sui fenomeni dell'elettrolisi* », e ne parla, proponendone l'inserzione nel Rendiconto. È approvata alla unanimità.

Il socio corrispondente Mammana presenta una sua memoria: « *Sulle minimanti assolute nei problemi classici per cui sono estremali le curve di Ribancour* ». L'Accademia unanime ne approva la stampa nel volume in corso degli Atti.

Il segretario presenta due note del socio corrispondente Andreoli per la stampa nel Rendiconto: una dal titolo: « *Equazioni differenziali e funzioni metageometriche* », e l'altra sulla « *Interpretazione probabilistica di teorie logiche e matematiche relative a fenomeni concreti* ».

Il socio corrispondente Spampinato presenta una nota della prof. Anna

Rocco Boselli, « *Equazioni algebriche nelle algebre del 4° ordine dotate di modulo* » ed una del prof. Federico Amodeo, « *Alcune applicazioni del carattere della gonalità delle curve algebriche* ». L'Accademia le accoglie per l'inserzione nel Rendiconto, con le limitazioni in vigore.

Con le medesime limitazioni vengono accolte, per la stampa nello stesso periodico, le seguenti note presentate dal socio Ricci:

1) prof. Franco Jossa, « *Calcolo di prismi a sezione rettangolare sollecitati a flessione semplice in regime non di Hooke* »;

2) prof. Franco Jossa, « *Osservazioni sul calcolo statico delle piastre sottoposte a carichi proporzionali agli abbassamenti* »;

3) dott. Camillo Zocchi, « *L'azione statica esercitata su una strada da ruote a cerchione rigido* »;

4) dott. Franco Mazzarella, « *Studio statico di un cilindro elastico sollecitato in condizioni più generali di quelle di De Saint Venant* »;

5) dott. Franco Mazzarella, « *Determinazione delle tensioni in una lastra rettangolare incastrata lungo due lati opposti soggetta a forze di massa* »;

6) dott. Franco Mazzarella, « *Determinazione delle tensioni in una volta sottile rigata a piano direttore ed avente per altre direttrici due semiellissi affini* »;

7) prof. Carlo Luigi Ricci, « *Contributo allo studio delle strutture iperstatiche di uniforme resistenza* ».

Il socio F. Giordani presenta una nota del prof. Mario Covello dal titolo « *Ricerche sulla fitina. Azione della fitasi dell'orzo sul fitinato di sodio* », proponendone l'inserzione nel Rendiconto, che viene approvata all'unanimità.

Il socio De Lorenzo presente una sua nota dal titolo: « *Il cratere del monte Nuovo disegnato da Francisco de Hollanda nel febraio del 1540* ».

Il socio Ecc. Longo offre in omaggio la « *Relazione per l'anno 1941 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli* », e ne discorre. Il presidente, a nome dei soci, ringrazia.

Il presidente, richiamando l'attenzione dei colleghi sulle recenti celebrazioni Galileiane svoltesi a Milano, Padova, Asiago e Roma in occasione del terzo centenario della morte, e ritenendo che l'Accademia non possa rimanere estranea ad esse, prega il socio Carnera di voler preparare per gli Atti una memoria che possa illustrare anche l'aspetto fisico dell'opera di Galileo, o altra parte della vita e dell'attività del sommo Scienziato, che sia stata meno messa in rilievo nelle ultime cerimonie commemorative. Lo prega inoltre, a nome dei colleghi, di voler dare un cenno delle più interessanti esperienze e conferenze, alle quali potè, negli scorsi giorni, personalmente assistere.

Il socio Carnera soddisfa il desiderio dei soci, riferendo sulle ceri-

monie preparate dall'Università di Padova per ricordare il suo grande Maestro. Anzitutto egli ricorda la lezione sperimentale di fisica, che il prof. F. Lori con insuperabile maestria volle presentare, ripetendo le esperienze più caratteristiche descritte dal Galileo. Tenendosi strettamente alle descrizioni contenute negli scritti, e solo valendosi di artifici offerti dalle possibilità tecniche moderne, onde rendere palesi anche ad un vasto uditorio certi fatti, il Lori ha fatto rivivere dopo oltre tre secoli fra le mura della stessa Università il pensiero e la parola di Galileo. Ma perchè rimanesse traccia imperitura dell'orma lasciata in quella Università, il Rettore, il prof. Carlo Anti, non preoccupandosi del fatto che l'Osservatorio astronomico non era parte del complesso universitario, e convinto che necessitava di mezzi moderni d'indagine, non esitò a far assumere dall'Università stessa la iniziativa ed il carico della costruzione del nuovo Osservatorio, dotandolo di un istrumento poderoso e perfetto, che ha il doppio vanto di non avere in Europa nessuno che lo superi, e di essere completamente fatto da noi in Italia. Dedicandolo alla memoria di Galileo si è creato il più significativo dei monumenti, che l'Università di Padova poteva erigere al suo Maestro.

Il socio corrispondente Mammana, testè ritornato dal Brasile, comunica i ringraziamenti personalmente espressigli dal prof. I. M. Azevedo do Amaral per la sua nomina a socio corrispondente straniero nella Sezione di Scienze matematiche, e preannuncia il prossimo arrivo di alcune pubblicazioni di lui, inviate in omaggio all'Accademia.

Alle ore 11,50' il presidente dichiara chiusa l'adunanza pubblica ed invita i soli soci ordinari a trattenersi, secondo l'ordine del giorno, per l'applicazione degli art. 12 e 13 del vigente Statuto e 28 del Regolamento.

Risultano presenti il presidente De Lorenzo ed i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Malquori, Pierantoni, Ricci, che raggiungono il numero legale.

La Sezione di Scienze naturali propone come soci ordinari i proff. Filippo Silvestri e Alberto De Dominicis, come socio corrispondente nazionale il prof. Antonio Scherillo, e come socio corrispondente straniero il prof. L. Ruzicka, della Technische Hochschule di Zurigo.

La Sezione di Scienze matematiche propone come soci ordinari i professori Gian Domenico Mattioli e Nicolò Spampinato e come socio corrispondente straniero il prof. Ilmari Bonsdorff, direttore dell'Istituto geodetico finlandese.

Su tali proposte si procede alla votazione dei singoli nomi, che risultano tutti approvati all'unanimità.

Quindi la R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli designa quali soci ordinari nella Sezione di Scienze naturali i seguenti:

1° Silvestri prof. Filippo,

2° De Dominicis prof. Alberto;

come socio corrispondente nazionale nella stessa Sezione:

1° Scherillo prof. Antonio,

e come socio corrispondente straniero nella medesima Sezione:

1° Ruzicka prof. L.

Designa inoltre quali soci ordinari nella Sezione di Scienze matematiche i seguenti:

1° Mattioli prof. Gian Domenico,

2° Spampinato prof. Nicolò;

e come socio corrispondente straniero nella stessa Sezione:

1° Bonsdorff prof. Ilmari.

Tali designazioni approvate dalla Classe saranno comunicate dal presidente della Società Reale di Napoli al Ministro per la Educazione Nazionale secondo le norme prescritte dall' art. 14 dello Statuto.

Opere ed Opuscoli ricevuti in dono dagli autori o editori dal 29 ottobre 1941 al 28 ottobre 1942 - XX.

L' inserzione nel presente elenco valga come ringraziamento ai donatori.

1. Académie des sciences et des arts, Prirodoslovne Razprave; knjiga IV. tome — Ljubliana, 1940.
2. Akademie znanosti in umetnosti v Ljubljani; knjiga I. — Ljubljana, 1940.
3. Amodeo F., La curva di Abel di gonalità 38. — Napoli, 1940.
4. » » Sul problema della gonalità. — Napoli, 1940.
5. » » Sulle curve piane C_6^7 di ordine sette e di genere sei. — Catania, 1941.
6. » » Il problema della gonalità. — Napoli, 1941.
7. Boni - Caligo - Conforto - Crocco - Faedo - Grioli - Picone - Puppini - Tolotti, Contributo dell' Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo al 2° Congresso dell' Unione Matematica Italiana. — Roma, 1941.
8. Bullettino dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli - Tomo XV. — Napoli, 1941.
9. Caligo D., Comportamento asintotico degli integrali dell' equazione $y''(x) + A(x)\,y(x) = 0$, nella ipotesi $\lim_{x \to +\infty} A(x) = 0$. — Roma, 1941.
10. Carrer A., Metageneratrice a croce. - Teorie e prove - I. E. N. G. F. 115. — Torino, 1941.
11. » » Una nuova saldatriee a corrente continua a metatrasformatrice - I. E. N. G. F. 117. — Torino, 1941.
12. Castellano G. di S. Sergio, La scoperta dell' aerostato e l'opera scientifica e storica di Tiberio Cavallo. — Roma, 1941.
13. Castellano G., Varietà - Giuseppe Melchiorre Vairo. — Napoli, 1941.
14. Cesari L., Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari. — Roma, 1941.
15. Ciaccia A., Caratteristiche di conversione e di modulazione dei triodi. — Milano, 1940.
16. Cimino M., Una soluzione in grande del problema di Cauchy per una particolare equazione in tre variabili, ottenuta con un metodo di M. Picone. — Roma, 1941.
17. Colamonico C., Paesi e popoli della terra. Volumi 3. — Milano, 1942.

18. Colamonico C., La carta del regno di Napoli della Libreria della Stella e la sua fonte principale. — Firenze, 1942.
19. Collana di quaderni agrari - Orti di guerra. — Torino, 1942.
20. De Angeli G., Organizzazione scientifico-sperimentale di alcune istituzioni agrarie della Germania. — Torino, 1941.
21. De Boer K., Stereofonische geluidsweergave. — Delft, 1940.
22. Della Beffa G. - Bongini V. - Servazzi O., Lezioni sulle malattie delle piante e mezzi di difesa. — Torino, 1942.
23. De Kok W. J. C., Bijdrage tot de kennis van minerale olien. — Delft, 1940.
24. Faedo B., Sulle trasformate multiple di Laplace. — Roma, 1941.
25. Fanelli E., Sistemi elastici nelle costruzioni civili. — Roma, 1941.
26. Ferrari-Toniolo A., Formulari per i quadripoli lineari - I. E. N. G. F. 120. — Torino, 1941.
27. Fichera G., Sviluppi in serie e teoremi di decomposizione in somma per le funzioni iperarmoniche. — Roma, 1941.
28. » » Generalizzazione del teorema d' Abel sulle serie di potenze. — Roma, 1941.
29. Francini G., Impurità e variabilità con la frequenza di resistenze negative. - I. E. N. G. F. 123. — Torino, 1941.
30. Fresa A. e Volta L., Osservazioni di comete e di piccoli pianeti al R. Osservatorio astronomico di Torino nell'anno 1941. — Torino, 1942.
31. Friedmann G., Lavorazione sociale cooperativa delle bietole. — Torino, 1941.
32. Gigli A., Il potere fonoisolante delle pareti semplici - I. E. N. G. F. 116. — Torino, 1941.
33. » » Metodi elettrostatici per la misura di spostamenti forze e pressioni - I. E. N. G. F. 119. — Torino, 1941.
34. Giunti V., Sviluppi in serie tipo Fourier di un vettore, secondo autovettori di un certo problema, e applicazione all' integrazione dell' equazione lineare a derivate parziali del 4° ordine competente al moto delle sbarre vibranti, dotate d' inerzia rotatoria. — Roma, 1941.
35. Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris - Miscellanea VIII - I.E.N.G.F. 112. — Torino, 1941.
36. Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris - Miscellanea IX - I.E.N.G.F. 114. — Torino, 1941.
37. Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris - Miscellanea X - I. E. N. G. F. 125. — Torino, 1941.
38. Longo B., Relazione per l' anno 1940 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1941.
39. » » Relazione per l' anno 1941 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annesse al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1942.
40. Miranda C., Un' osservazione su un teorema di Brouwer. — Roma, 1940.
41. » » Sulle equazioni integrali il cui nucleo è funzione lineare del parametro. — Roma, 1940.

42. Miranda C., Nuovi contributi alla teoria delle equazioni integrali lineari con nucleo dipendente dal parametro. — Roma, 1940.
43. » » Su talune serie di funzioni olomorfe. — Roma, 1941.
44. Picone M., Nuova analisi esistenziale e quantitativa delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. — Roma, 1941.
45. » » Teoremi di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie e loro conseguenze. — Roma, 1941.
46. » » Sul calcolo delle derivate d' ordine superiore. — Roma, 1941.
47. » » L' Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo e l'industria assicurativa. — Roma, 1941.
48. » » Su ua recensione della mia memoria: Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica-Matematica degli « Annali Scientifici » della Università di Jassy, vol. XXVI, Sez. I (1940). — Roma, 1941.
49. Pinciroli A. e Francini G., Comando elettronico di un gruppo convertitore - I. E. N. G. F. 121. — Torino, 1941.
50. Pinciroli A., Resistenze differenziali negative tarate - I. E. N. G. F. 122. — Torino, 1941.
51. Ricci C. L., Meccanica applicata alle costruzioni. — Napoli, 1942.
52. Rosani S., Trasmettitori navali. — Milano, 1940.
53. Rossotto C., La redenzione della terra somala e l' autarchia. - L' opera dell' A. R. il Duca degli Abruzzi. — Torino, 1940.
54. Rùdari N. M., Sulla determinazione delle posizioni celesti per mezzo della fotografia. — Pavia, 1941.
55. Ruelle U., L' integrale di Fourier per funzioni di più variabili. — Livorno, 1940.
56. Tolotti C., Sul calcolo delle piastre elastiche a forma di settore anulare. — Roma, 1941.
57. Van Duijn D., Bijdrage tot de kennis van de wolfraambronzen. — Delft, 1940.
58. Viola T., Calcolo approssimato di autovalori. — Roma, 1941.
59. Volta L., Una nuova variabile nella costellazione di Perseo. — Torino, 1942.
60. Zin G., Dispositivo per la misura di impendenze a radiofrequenza - I.E.N.G.F. 113. — Torino, 1941.
61. » » Sul comportamento delle linee non uniformi a regime - I. E. N. G. F. 118. — Torino, 1941.
62. » » I transitori nelle linee non uniformi - I. E. N. G. F. 124. — Torino, 1941.

INDICE DEL VOLUME

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dalla R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1940-1941 (XIX) . . . . . pag. 3

A. Scherillo — Le lave attuali del Vesuvio: I) lave dell'autunno 1940 » 9

G. Sambito — Esempi di coazioni termiche negli archi piani a grande curvatura . . . . . » 15

G. Quagliariello — Commemorazione del socio Filippo Bottazzi . » 22

M. M. Jacopetti — L'attaceo anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini . . . . . » 30

G. Andreoli — Elementi matematici di base per una teoria delle collettività secondo la genetica . . . . . » 40

G. Andreoli — Sull'equazione di Stiefel ed altre analoghe . . » 48

M. Picone — Commemorazione del socio Ernesto Pascal . . . » 54

U. Beretta — Studi energetici sui fenomeni di elettrolisi . . . » 83

F. Jossa — Risultati di alcune esperienze sulle proprietà meccaniche di ferri normali e ferri meccanicamente incruditi sottoposti preliminarmente a moderate ripetute sollecitazioni dinamiche. . . . . » 97

F. Jossa — Metodo di influenza e di successiva introduzione di incognite per il calcolo dei telai multipli mediante le rotazioni ai nodi . . . . . » 107

R. Signorini — Cenni sulla formazione gessoso-solfifera del bacino del Neto in Calabria . . . . . » 118

U. Beretta — La decomposizione della nitrammide . . . . . » 124

A. Galli — Instabilità nell'equilibrio d'una volta-trave . . . » 139

G. Palomba — Elementi matematici per l'economia corporativa. (Sul problema della produzione) . . . . . » 148

M. M. Jacopetti — Rendimento di energia degli elettrolizzatori a diaframmi filtranti per cloruro sodico . . . . . » 157

A. Colucci — Sul prolungamento analitico . . . . . » 182

F. Mazzarella — Determinazione della pressione esercitata su di un suolo elastico da una trave appoggiata su di esso. . » 188

G. Barba — Questioni di convergenza e teorema di Hadamard per le serie di Dirichlet e le serie di potenze « generalizzate » gruppali . . . . . » 193

F. Mazzarella — Determinazione del « risultante di due equazioni » per la ricerca delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio . . » 208

F. Mazzarella — Applicazione del metodo Cross al calcolo dei telai a nodi spostabili . . . . . pag. 209

F. Mazzarella — Considerazioni sulla distribuzione delle tensioni tangenziali negli archi piani a grande curvatura , . » 214

G. Platania — Su gli aloni. (Risultati di osservazioni eseguite in Napoli dal 1922 al 1939) , ... » 222

A. Rocco Boselli — Le serie di potenze nelle sedici algebre complesse del 4.° ordine dotate di modulo. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 233

G. Andreoli — Equazioni algebriche nei corpi numerici . . . » 234

G. Andreoli — Interpretazione probabilistica di teorie logiche e matematiche relative a fenomeni concreti . . . . » 245

M. Covello — Ricerche sulla fitina. Azione della fitasi dell'orzo sul fitinato di sodio . . . . . » 251

G. De Lorenzo — Il cratere del Monte Nuovo disegnato da Francisco de Hollanda nel febraio del 1540 . . . . . » 259

F. Castaldi — L'abitazione a corte in Sardegna (Campidano) e l'origine mediterranea della corte. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 262

G. Giuga — Alcune estensioni del determinante di Vandermonde . » 263

T. Nicolini — Il periodo medio dell'attività solare in relazione alle osservazioni antiche e moderne . . . . . » 297

G. Guerra — Calcolo statico dei telai elastici spaziali . . . » 307

G. Andreoli — Equazioni differenziali e funzioni metageometriche . » 316

G. De Lorenzo — Le acque freatiche dei deserti conosciute ed utilizzate nell'antica India . . . . . » 324

G. Mirigliano — Intorno all'etá dei fossili rinvenuti nei materiali vulcanici del golfo di Napoli . . . . . » 327

F. Amodeo — Alcune applicazioni del carattere della gonalità delle curve algebriche . . . . . » 328

G. Mirigliano — Osservazioni geologiche nella bassa valle del Sabato » 344

C. L. Ricci — Calcolo rigoroso delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio . » 344

I. M. Azevedo do Amaral — Sobre a integraçâo das equaçôes diferenciais ordinarias lineares e as equaçôes integrais . » 345

M. Turra — L'estensimetro a base fissa nella determinazione di dilatazioni non uniformi . . . . . » 353

C. L. Ricci — Metodo semplificativo e speditivo per il calcolo statico di verifica e di progetto per un arco reticolare a spinta eliminata . . . . . » 362

A. Rocco Boselli — Equazioni algebriche nelle algebre del 4.° ordine dotate di modulo . . . . . » 363

F. Jossa — Calcolo di prismi a sezione rettangolare sollecitati a flessione semplice in regime non di Hooke . . . . pag. 386

F. Mazzarella — Calcolo del profilo longitudinale di una trave incastrata agli estremi di uguale resistenza rispetto ai momenti massimi dovuti ad un carico mobile . . . » 399

F. Jossa — Osservazioni sul calcolo statico delle piastre sottoposte a carichi proporzionali agli abbassamenti . . . . » 400

M. L. Ettorre — Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse . » 404

C. Zocchi — L'azione statica esercitata su una strada da ruote a cerchione rigido . . . . . » 404

F. Mazzarella — Studio statico di un cilindro elastico sollecitato in condizioni più generali di quelle di De Saint Venant. » 404

F. Mazzarella — Determinazione delle tensioni in una lastra rettangolare incastrata lungo due lati opposti soggetta a forze di massa . . . . . » 404

F. Mazzarella — Determinazione delle tensioni in una volta sottile rigata a piano direttore ed avente per altre direttrici due semiellissi affini . . . . . » 405

C. L. Ricci — Contributo allo studio delle strutture iperstatiche di uniforme resistenza . . . . . » 405

U. Bencivenga — Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 405

M. Bakunin — Relazione sul concorso al premio triennale Agostino Oglialoro Todaro . . . . . » 406

Processi verbali delle adunanze dell'8 novembre, 6 dicembre 1941, 3 gennaio, 7 febbraio, 7 marzo, 4 aprile, 2 maggio e 13 giugno 1942 (XX) . . . . . » 407

Opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 29 ottobre 1941 al 28 ottobre 1942 (XX) . . . » 417

Indice del volume. . . . . » 420

INDICE

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dalla R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1940-41 (XX) . . . . . Pag. 3
A. Scherillo — Le lave attuali del Vesuvio: I) Lave dell' autunno 1940 . . » 9
G. Sambito — Esempi di coazioni termiche negli archi piani a grande curvatura. » 15
G. Quagliariello — Commemorazione del socio Filippo Bottazzi. . . . . » 22
M. M. Jacopetti — L' attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini . . . . . » 30
G. Andreoli — Elementi matematici di base per una teoria delle collettività secondo la genetica . . . . . » 40
G. Andreoli — Sull'equazione di Stiefel ed altre analoghe . . . . . » 48
M. Picone — Commemorazione del socio Ernesto Pascal. . . . . » 54
U. Beretta — Studi energetici sui fenomeni di elettrolisi. . . . . » 83
F. Jossa — Risultati di alcune esperienze sulle proprietà meccaniche di ferri normali e ferri meccanicamente incruditi sottoposti preliminarmente a moderate ripetute sollecitazioni dinamiche . . . . . » 97
F. Jossa — Metodo di influenza e di successiva introduzione di incognite per il calcolo dei telai multipli mediante le rotazioni ai nodi . . . . . » 107
R. Signorini — Cenni sulla formazione gessoso-solfifera del bacino del Neto in Calabria . . . . . » 118
U. Beretta — La decomposizione della nitrammide . . . . . » 124
A. Galli — Instabilità nell' equilibrio d' una volta-trave . . . . . » 139
G. Palomba — Elementi matematici per l'economia corporativa. (Sul problema della produzione) . . . . . » 148
M. M. Jacopetti — Rendimento di energia degli elettrolizzatori a diaframmi filtranti per cloruro sodico . . . . . » 157
A. Colucci — Sul prolungamento analitico. . . . . » 182
F. Mazzarella — Determinazione della pressione esercitata su di un suolo elastico da una trave appoggiata su di esso. . . . . » 188
G. Barba — Questioni di convergenza e teorema di Hadamard per le serie di Dirichlet e le serie di potenze "generalizzate,, gruppali . . . . » 193
F. Mazzarella — Determinazione del "risultante di due equazioni,, per la ricerca delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio. . . . . » 203
F. Mazzarella — Applicazione del metodo Cross al calcolo dei telai a nodi spostabili . . . . . » 209
F. Mazzarella — Considerazioni sulla distribuzione delle tensioni tangenziali negli archi piani a grande curvatura . . . . . » 214
G. Platania — Su gli aloni. (Risultati di osservazioni eseguite in Napoli dal 1922 al 1939) . . . . . » 222
A. Rocco Boselli — Le serie di potenze nelle sedici algebre complesse del 4. ordine dotate di modulo *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 233
G. Andreoli — Equazioni algebriche nei corpi numerici . . . . . » 234
G. Andreoli — Interpretazione probabilistica di teorie logiche e matematiche relative a fenomeni concreti . . . . . » 245
M. Covello — Ricerche sulla fitina. Azione della fitasi dell'orzo sul fitinato di sodio » 251
G. De Lorenzo — Il cratere del Monte Nuovo disegnato da Fra cisco de Hollanda nel febraio del 1540 . . . . . » 259
F. Castaldi — L'abitazione a corte in Sardegna (Campidano) e l'origine mediterranea della corte. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 262
G. Giuga — Alcune estensioni del determinante di Vandermonde . . . . » 263
T. Nicolini — Il periodo medio dell' attività solare in relazione alle osservazioni antiche e moderne . . . . . » 297
G. Guerra — Calcolo statico dei telai elastici spaziali . . . . . » 307
G. Andreoli — Equazioni differenziali e funzioni metageometriche. . . . . » 316
G. De Lorenzo — Le acque freatiche dei deserti conosciute ed utilizzate nell'antica India . . . . . » 324
G. Mirigliano — Intorno all'età dei fossili rinvenuti nei materiali vulcanici del golfo di Napoli . . . . . » 327
F. Amodeo — Alcune applicazioni del carattere della gonalità delle curve algebriche » 328
G. Mirigliano — Osservazioni geologiche nella bassa valle del Sabato . . . » 344
C. L. Ricci - Calcolo rigoroso delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio . . . . . » 344

I. M. Azevedo do Amaral — Sobre a integração das equações diferenciais ordinarias lineares e as equações integrais . . . . . pag. 345
M. Turra — L' estensimetro a base fissa nella determinazione di dilatazioni non uniformi . . . . . » 353
C. L. Ricci — Metodo semplificativo e speditivo per il calcolo statico di verifica e di progetto per un arco reticolare a spinta eliminata . . . . . » 362
A. Rocco Boselli — Equazioni algebriche nelle algebre del 4.° ordine dotate di modulo. . . . . » 383
F. Jossa — Calcolo di prismi a sezione rettangolare sollecitati a flessione semplice in regime non di Hooke . . . . . » 386
F. Mazzarella — Calcolo del profilo longitudinale di una trave incastrata agli estremi di uguale resistenza rispetto ai momenti massimi dovuti ad un carico mobile . . . . . » 399
F. Jossa — Osservazioni sul calcolo statico delle piastre sottoposte a carichi proporzionali agli abbassamenti . . . . . » 400
M. L. Ettorre — Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse . . . . . » 404
C. Zocchi — L' azione statica esercitata su una strada da ruote a cerchione rigido » 404
F. Mazzarella — Studio statico di un cilindro elastico sollecitato in condizioni più generali di quelle di De Saint Venant . . . . . » 404
F. Mazzarella — Determinazione delle tensioni in una lastra rettangolare incastrata lungo due lati opposti soggetta a forze di massa . . . . . » 404
F. Mazzarella — Determinazione delle tensioni in una volta sottile rigata a piano direttore ed avente per altre direttrici due semiellissi affini. . . . 405
C. L. Ricci — Contributo allo studio delle strutture iperstatiche di uniforme resistenza . . . . . » 405
U. Bencivenga — Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo (*Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti*) » 405
M. Bakunin — Relazione sul concorso al premio triennale Agostino Oglialoro Todaro . . . . . » 406
Processi verbali delle adunanze dell' 8 novembre, 6 dicembre 1941, 3 gennaio, 7 febbraio, 7 marzo, 4 aprile, 2 maggio e 13 giugno 1942 (XX) . . . » 407
Opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 29 ottobre 1941 al 28 ottobre 1942 (XX) . . . . . » 417
Indice del volume . . . . . » 420

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI